

**Politechnika Opolska**

**Autoreferat pracy doktorskiej:**

**Liniowe i nieliniowe blokowo-zorientowane modele frakcyjne w  
zastosowaniach do predykcji i sterowania dyskretnymi obiektami  
frakcyjnymi**

*Linear and non-linear block-oriented fractional order models with application  
to prediction and control of discrete-time fractional order systems*

Autor: **mgr inż. Marcin Gałek**

Promotor: **dr hab. inż. Rafał Stanisławski, prof. ucz.**

**Opole, 2022**

**Streszczenie:** W rozprawie przedstawiono nowe wyniki w modelowaniu układów niecałkowitego rzędu (tzw. układy frakcyjne). W pierwszej kolejności, zostały przedstawione i poddane analizie różne metody aproksymacji o skończonej złożoności obliczeniowej dyskretnej różnicy niecałkowitego rzędu w oparciu o różne schematy dyskretyzacji, t.j. Eulera, Tustina i Al-Alaoui'ego. Zaproponowane aproksymatory zostały włączane do modelu układu niecałkowitego rzędu w przestrzeni stanów i wykorzystywane do modelowania systemów frakcyjnych. Z drugiej strony, w rozprawie rozważane są inne uogólnienia ułamkowego rzędu, w postaci frakcyjnych modeli Laguerre'a, które implementują różne aproksymacje różnic ułamkowych rzędów. Ta klasa modeli ułamkowego rzędu jest w pewnym sensie rodzajem aproksymatorów heurystycznych, który może być efektywnie wykorzystany w modelowaniu różnych systemów, zarówno ułamkowych, jak również klasycznych. Ponadto zaproponowany model Laguerre'a został również wykorzystany do aproksymacji procesów nieliniowych za pomocą nieliniowych modeli blokowo-zorientowanych, t.j. modeli Hammersteina, Wienera i z nieliniowością w sprzężeniu zwrotnym. W dalszej części pracy, zarówno liniowe, jak i nieliniowe modele ułamkowego rzędu zostały wykorzystane w procesie predykcji, jako predyktory ułamkowego rzędu. W/w predyktory są podstawą do zaproponowania prostych regulatorów predykcyjnych w postaci algorytmów sterowania z rozszerzonym horyzontem predykcji. Przedstawione w rozprawie badania porównawcze oparte na symulacjach wskazują na wysoką wydajność zarówno modeli liniowych i nieliniowych, jak również regulatorów predykcyjnych.

**Abstract:** The dissertation presents new results in the modeling of fractional-order systems. Firstly, it presents and analyses various finite-length approximations to the discrete-time fractional-order difference based on various discretization schemes, including Euler, Tustin, and Al-Alaoui. On this basis, proposed finite-length approximators are included in the fractional-order state-space model and used to approximate fractional-order systems. On the other hand, the dissertation considers fractional-order generalizations of Laguerre-based models, which includes various approximations of fractional-order differences incorporated in the model. This fractional-order Laguerre model is, in fact, a kind of heuristic approximator, which can be effectively used in the modeling of various fractional- and integer-order systems. Also, the proposed Laguerre model is included in the nonlinear block-oriented models in terms of Hammerstein, Wiener, and feedback-nonlinear models. In the next part of the paper, both linear- and nonlinear- fractional-order models are applied in the prediction process to reach various fractional-order predictors. The predictors are the basis for proposing simple predictive controllers in terms of the Extended Horizon Predictive Controllers. The simulation-based comparative analyses presented in the dissertation show high performances of linear and nonlinear models, as well as predictive controllers.

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Cel, teza i zawartość rozprawy</b>	<b>6</b>
2.1	Struktura rozprawy . . . . .	6
2.2	Główne osiągnięcia autora . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Pochodna i różnica niecałkowitego rzędu – wprowadzenie</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Systemy niecałkowitego rzędu</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Modele nieliniowe blokowo-zorientowane niecałkowitego rzędu</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Sterowanie predykcyjne/adaptacyjne oparte na modelach niecałkowitego rzędu</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>26</b>
<b>8</b>	<b>Lista publikacji doktoranta</b>	<b>28</b>
	<b>Literatura</b>	<b>30</b>

# Rozdział 1

## Wprowadzenie

Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu w ostatnich latach stał się przedmiotem rozważań naukowców na całym świecie. W odniesieniu do rachunku różniczkowego i całkowego jest on naturalnym uogólnieniem tradycyjnych definicji i określa całkę i różniczkę dla rzędu zdefiniowanego w dziedzinie liczb rzeczywistych. Pierwsza wzmianka dotycząca rachunku niecałkowitego rzędu pochodzi z roku 1695 kiedy to w liście, który Leibnitz napisał do L.Hopital zawarł pytanie dotyczące pochodnej rzędu  $1/2$ . Pierwsze opracowanie dotyczące rozważań nad powyższym zagadnieniem ukazało się ponad sto lat później, w XIX wieku [1]. Podstawy matematyczne rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu w formie, na której opierają się współcześnie naukowcy powstały pod koniec wspomnianego już XIX wieku, a zbudowane zostały przez takich matematyków jak Grünwald, Letnikov, Riemann i Liouville [14, 23, 61]. Jednym z mniej znanych kreatorów podwalin obecnie wykorzystywanej teorii rachunku niecałkowitego rzędu jest Niels Henrik Abel, który to w roku 1823 opublikował artykuł przedstawiający całkę jak i pochodną niecałkowitego rzędu w formie, która obecnie znana jest jako całka Riemanna-Liouville'a oraz pochodna Caputo [58]. Pierwsze praktyczne zastosowanie pochodnych ułamkowego rzędu przedstawione również zostało przez Abel-a i związane było z problemem krzywych izochronowych [62]. Szeroko prowadzone rozważania teoretyczne rachunku niecałkowitego rzędu doprowadziły również do praktycznych aplikacji. Jednym z pierwszych praktycznych zastosowań w dziedzinie elektrotechniki było wykorzystanie pochodnej niecałkowitego rzędu przez Olivera Heaviside'a do analizy linii transmisyjnej, a miało to miejsce około roku 1890 [25]. Wpływ prac Heaviside'a, niezwykle angielskiego myśliciela i samouka, na obecny stan elektrotechniki pozostaje niebagatelny. Od tego momentu zainteresowanie rachunkiem różniczkowym i całkowym ułamkowego rzędu w środowisku inżynierów i naukowców wzrasta aż do dnia dzisiejszego. Pierwsza konferencja, której tematyka poświęcona była temu zagadnieniu pt. *International Conference on Fractional Calculus and Its Application* miała miejsce w 1974 roku [43]. Fenomen rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu polega na tym, że wiele zjawisk fizycznych można dokładniej opisać za jego pomocą. Dlatego obszar o naukowy w którym jest wykorzystywany stale się powiększa. Wymienić można takie obszary jak nanotechnologia, mechanika, chemia, biologia, medycyna, bioinżynieria, elektryka, informatyka automatyka i wiele innych. Wraz z rozwojem techniki skutkującym zwiększeniem mocy obliczeniowej komputerów możliwa stała się implementacja rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu w praktyce. Obszary implementacji przestały się ograniczać do przetwarzania obrazów, modelowania superkondensatorów, czy opisu procesów dyfuzji [22, 42, 3, 57]. Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu z powodzeniem użyty również został do modelowania ruchu w sieci informatycznej [89], procesów elektrochemicznych [26, 87], zagadnień mechaniki materiałów lepkosprężystych [2, 10, 68]. W przypadku przetwarzania obrazu rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu wykorzystany został między innymi do rozwiązywania problemów z detekcją krawędzi, czy segmentacją obrazu [88, 21]. Należy zwrócić uwagę na fakt że w obecnej chwili około 1/3 publikacji znajdujących się w zasobach bazy Web of Science dotyczących rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu związanych jest z takimi działami nauki jak *Elektrotechnika*, *Au-*

tomatyka i Robotyka oraz Matematyka. W obszarze elektrotechniki należy wspomnieć o zastosowaniu rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu jako bardzo efektywnego narzędzia modelowania procesu ładowania i rozładowywania superkondensatorów [8, 60, 19, 17, 20, 35, 44]. W tym przypadku należy jednak mieć na uwadze, że pochodna frakcyjna zależy od kierunku prądu w obwodzie ładowania/rozładowywania [33, 34]. Odrębnym zagadnieniem są tzw. frakcyjne obwody elektryczne, w których elementy są elementami frakcyjnymi [27, 29, 30, 67, 50]. Innym zastosowaniem związanym z dziedziną elektrotechniki jest koncepcja memrystorów niecałkowitego rzędu [59].

W obszarze Automatyki i Robotyki możemy zaobserwować wzrost zainteresowania rachunkiem różniczkowym i jego wykorzystania w takich zagadnieniach jak [70]:

- analiza właściwości systemów niecałkowitego rzędu,
- modelowanie oraz identyfikacja systemów niecałkowitego rzędu,
- uogólnienie frakcyjnych strategii sterowania,
- zastosowania aplikacyjne.

W kontekście analizy układów frakcyjnych (niecałkowitego rzędu), główną kwestią jest wpływ pochodnej/całki niecałkowitego rzędu zawartej w układzie dynamicznym na właściwości układów. Wpływ ten jest jednym z głównych pytań w obszarze analizy fundamentalnych własności systemu takich jak analiza stabilności zarówno dla systemów ciągłych jak i dyskretnych [41, 5, 18, 6, 49, 28, 71, 74], metod obserwowalności [28, 31, 32, 55], implementacji pochodnych zmiennych w czasie [66] i wielu innych.

W zagadnieniach związanych z modelowaniem i identyfikacją systemów, jedną z podstawowych kwestii jest implementacja pochodnej/różnicy frakcyjnej. Na przestrzeni ostatnich lat zaproponowano różne rozwiązania aproksymacji i implementacji pochodnej/różnicy niecałkowitego rzędu zarówno dla systemów ciągłych, jak i dyskretnych. W przypadku gdy mamy do czynienia z układem ciągłym większość implementacji opiera się na podejściu Oustaloup'a [52, 85]. Koncepcje implementacji różnicy niecałkowitego rzędu dla układu dyskretnego opierają się z kolei na: 1) różnych implementacjach różnicy Grünwalda-Letnikowa o skończonej długości modelu [51, 48, 56, 79], 2) zastosowaniu metody CFE (ang. *Continuous Fraction Expansion*) w różnych operatorach dyskretyzacji [81, 46, 64, 45], 3) inne modele oparte na filtrach o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (ang. *Infinite Impulse Response* – IIR) zastosowanych dla różnych definicji różnicy niecałkowitego rzędu [4, 47]. Kolejnym interesującym zagadnieniem w tej dziedzinie jest modelowanie układów niecałkowitego rzędu całości za pomocą modeli rzędu całkowitego, zarówno dla układów ciągłych i dyskretnych [36, 37, 63, 83, 72].

W obszarze systemów sterowania można znaleźć szereg prac, które skutecznie wykorzystują rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu. W tym miejscu najbardziej popularnym podejściem jest uogólnienie frakcyjne kontrolera PID opisanego jako  $PI^\lambda D^\mu$ , w którym to zarówno część całkowa jak i pochodna implementuje rachunek niecałkowitego rzędu [7, 54, 9, 86]. W pracy [53] został przedstawiony kontroler CRONE (fra. *Commande Robust d'Order Non Entier*), w którym wykorzystano różniczkowanie niecałkowitego rzędu. W innych pracach możemy znaleźć frakcyjne uogólnienia różnych zaawansowanych technik sterowania, które to mogą zapewnić wysoką skuteczność regulacji dla układów całkowitego i niecałkowitego rzędu. Wśród nich możemy wymienić chociażby kontroler predykcyjny ułamkowego rzędu, oparty na skończonej długości implementacji [11, 73, 13, 12]. Innym przykładem uogólnienia ułamkowego rzędu nowoczesnych układów sterowania jest zastosowanie dyskretnego frakcyjnego regulatora LQR (ang. *Linear-Quadratic Regulator*), w którym układ dynamiczny opisany został za pomocą równań różnicowych niecałkowitego rzędu. Regulator LGG (ang. *Linear-quadratic-Gaussian*) był rozważany między innymi w pracach [15, 16, 65].

Z powyższych rozważań wynika, że systemy niecałkowitego rzędu cieszą się dużym zainteresowaniem zarówno w nauce, jak i technice. Zainteresowanie to obejmuje dyscypliny *Automatyka i Robotyka* i *Elektrotechnika*. Jednak wiele obszarów na tej płaszczyźnie wymaga dalszych opracowań. Dlatego kolejne prace w tym obszarze mogą doprowadzić do nowych, ciekawych rezultatów.

## Rozdział 2

# Cel, teza i zawartość rozprawy

Rozważania przedstawione we wstępie pozwalają na sformułowanie tezy i celu rozprawy. W rozdziale przedstawiono także główną hipotezę rozprawy, opis poszczególnych rozdziałów pracy, oraz główne osiągnięcia autora

Teza pracy została sformułowana następująco:

**Opracowanie zbioru liniowych i nieliniowych blokowo-zorientowanych modeli frakcyjnych umożliwi konstrukcję efektywnych, pod względem dokładności i złożoności obliczeniowej, algorytmów predykcji i sterowania dyskretnymi obiektami frakcyjnymi.**

Biorąc pod uwagę powyższą tezę, głównym celem rozprawy jest opracowanie zestawu liniowych i nieliniowych modeli blokowo-zorientowanych opartych na równaniach różnicowych ułamkowego/niecałkowitego rzędu, których konstrukcja i relatywnie niska złożoność obliczeniowa pozwalają na zastosowanie tych modeli w predykcji i sterowaniu układami ułamkowego rzędu. Drugim celem pracy jest opracowanie równań predykcyjnych dla proponowanych modeli i ich implementacja w problemie sterowania predykcyjnego.

W pracy sformowano następującą hipotezę badawczą:

**Możliwe jest zbudowanie zestawu liniowych i nieliniowych blokowo-zorientowanych modeli ułamkowego rzędu przydatnych do zadań predykcji i sterowania.**

Zawartość pracy ma na celu udowodnienie tezy i hipotezy badawczej pracy, a także ociążenie wynikających z nich celów rozprawy. Struktura rozprawy, która składa się z 7 rozdziałów, została opisana w kolejnej sekcji.

### 2.1 Struktura rozprawy

W celu udowodnienia hipotezy rozprawy oraz spełnienia postawionej tezy i celu autor zaproponował następującą strukturę pracy:

- 1) **Wprowadzenie – motywacja.** W tym rozdziale przedstawiono pewne wprowadzenie do rachunku niecałkowitego rzędu. Przedstawiono również wpływ rachunku niecałkowitego rzędu na modelowanie układów dynamicznych i algorytmów sterowania, co jest głównym tematem niniejszej rozprawy.
- 2) **Cel badań i przegląd pracy dyplomowej.** W tym rozdziale przedstawiono tezę, cel i hipotezę rozprawy. W rozdziale przedstawiona została również struktura pracy oraz opis wkładu autor-skiego.

- 3) **Pochodna i różnica niecałkowitego rzędu – wprowadzenie.** W rozdziale przedstawiono podstawy pochodnych i różnic niecałkowitego rzędu. Przywołano powszechnie stosowane definicje pochodnej ułamkowego rzędu oraz schematy dyskretyzacji dla tych pochodnych. W rozdziale przedstawiono również podstawowe własności pochodnych i różnic niecałkowitego rzędu. Ponadto rozdział przedstawia i analizuje różne przybliżenia różnicy rzędu niecałkowitego o skończonej długości implementacji.
- 4) **Systemy niecałkowitego rzędu.** W tym rozdziale przedstawiono wyniki implementacji pochodnych i różnic niecałkowitego rzędu do systemów dynamicznych. Rozdział koncentruje się na wybranych problemach układów z czasem dyskretnym. Przedstawiono implementację różnic niecałkowitego rzędu i ich aproksymację w systemach opisanych w przestrzeni stanu. Przedstawiono również heurystyczny model Laguerre’a niecałkowitego rzędu w oparciu o różne różnice ułamkowego rzędu. Ponadto w rozdziale przedstawiono nowe uogólnienie modelu FIR, tzw. model oparty na funkcjach bazowych różnic niecałkowitego rzędu.
- 5) **Nieliniowe modele blokowo-zorientowane niecałkowitego rzędu.** Niniejszy rozdział koncentruje się na modelowaniu i identyfikacji nieliniowych układów blokowo-zorientowanych. W tej części omówiono różne modele nieliniowe, w tym model Hammersteina, Wienera i nieliniowy model ze sprzężeniem zwrotnym. Części liniowe tych systemów są stosowane wybrane modele liniowe z poprzedniego rozdziału, a do modelowania części nieliniowej użyto rozwinięcie wielomianowe i radialne funkcje bazowe.
- 6) **Sterowanie predykcyjne/adaptacyjne oparte na modelach niecałkowitego rzędu.** W tym rozdziale przeanalizowano różne implementacje predyktorów stanu/wyjścia, w tym predyktory oparte na aproksymacjach zaprezentowanych w Rozdziale 3. Również w tej części pracy przedstawiono predyktory oparte na aproksymacjach uzyskanych z zastosowaniem narzędzi redukcji i f modelu Laguerre’a niecałkowitego rzędu. Wybrane predyktory są wykorzystywane w algorytmie sterowania z rozszerzonym horyzontem predykcji EHPC.
- 7) **Podsumowanie.** W rozdziale przedstawiono wnioski podsumowujące dorobek rozprawy. W rozdziale zawarto również opis kierunków przyszytych prac autora.

## 2.2 Główne osiągnięcia autora

Główny wkład autora dotyczy różnych aspektów aproksymacji, zarówno elementów niecałkowitego rzędu, jak również systemów ułamkowego rzędu opisanych w czasie dyskretnym, a także wyniki związane ze sterowaniem predykcyjnym. Subiektywna lista osiągnięć autora została przedstawiona w punktach:

- 1) Numeryczna implementacja schematu dyskretyzacji Al-Alaoui’ego pochodnej niecałkowitego rzędu. Zaproponowanie metody wyznaczania optymalnego współczynnika wagowego dyskretyzatora Al-Alaoui’ego, jako funkcji rzędu ułamkowego.
- 2) Badania symulacyjne efektywności modeli różnicy i całki niecałkowitego rzędu uzyskanych z zastosowaniem narzędzi redukcji rzędu modelu opartych na postaci zbalansowanej.
- 3) Analiza porównawcza różnych schematów dyskretyzacji pochodnej ułamkowego rzędu.
- 4) Implementacja modelu Al-Alaoui’ego i Tustina w modelach opartych frakcyjnych wersjach filtrów Laguerre’a.

- 5) Opracowanie nowego modelu heurystycznego opartego na zaproponowanych funkcjach bazowych opartych różnicy niecałkowitego rzędu, które są (w pewnym sensie) uogólnieniem modelu FIR. Numeryczna implementacja modelu i analiza jego wydajności.
- 6) Zastosowanie rekurencyjnych/adaptacyjnych metod najmniejszych kwadratów opartej do estymacji parametrów różnych modeli heurystycznych w identyfikacji systemów ułamkowego rzędu.
- 7) Udział w implementacji modeli liniowych opartych na frakcyjnych wersjach modeli Laguerre'a w nieliniowych modelach blokowo-zorientowanych, obejmujących systemy Hammersteina, Wienera i systemy nieliniowe ze sprzężeniem zwrotnym. Numeryczne zastosowanie procedur identyfikacyjnych i realizacja badań symulacyjnych.
- 8) Uczestnictwo w opracowaniu predyktora opartego na modelach niecałkowitego rzędu w przestrzeni stanu implementujących aproksymatory FFD/NFFD. Numeryczna implementacja procedur i analiza efektywności.
- 9) Implementacja predyktorów dla modeli opartych na frakcyjnych wersjach filtrów Laguerre'a.
- 10) Propozycja i implementacja predyktorów dla różnych nieliniowych systemów blokowo-zorientowanych ułamkowego rzędu.
- 11) Udział w opracowaniu i analizie wydajności regulatora predykcyjnego EHPC dla systemów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu.



## Rozdział 3

# Pochodna i różnica niecałkowitego rzędu – wprowadzenie

W rozdziale przedstawiono podstawy rachunku różniczkowego i całkowego niecałkowitego rzędu. W pierwszej kolejności, przywołano podstawowe definicje rachunku niecałkowitego rzędu, a następnie omówiono różne schematy dyskretyzacji. Jednak szczególną uwagę skupiono w rozdziale na narzędziach aproksymacji różnic niecałkowitego rzędu na podstawie dyskretyzatorów Eulera, Tustina i Al-Alaoui'ego. Rozdział kończy analiza porównawcza różne przybliżenia różnic rzędu ułamkowego. Wybrane wyniki osiągnięte przez autora zostaną przedstawione poniżej.

### Aproksymacje różnic niecałkowitego rzędu

Najprostszą metodą modelowania różnicy niecałkowego rzędu, choć dość złożoną w kontekście obliczeniowym, jest oparta na dyskretyzacji PSE (ang. *Power Series Expansion*) dla pochodnej Grünwalda-Letnikova. Osiąga się ją przez wprowadzenie limitu na sumę wyliczaną z różnicy. W ten sposób otrzymuje się następujące równanie modelu

$$\Delta^\alpha x(t, J) = \frac{1}{T^\alpha} \left[ x(t) + \sum_{j=1}^J (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(t) q^{-j} \right] \quad (3.1)$$

gdzie  $\Delta^\alpha x(t, J)$  oznacza różnicę rzędu  $\alpha$  z sygnału  $x(t)$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , jest czasem dyskretnym,  $\binom{\alpha}{j}$  oznacza dwumian Newtona,  $T$  to czas próbkowania, oraz  $J = \min(t, \bar{J})$  dla  $\bar{J}$  będącym limitem dla  $j$ , kiedy  $t > \bar{J}$ .

Inną rozpatrywaną w pracy metoda jest oparta na dyskretyzatorze Tustina i skończonej implementacji rozwinięcia CFE. Ostatecznie otrzymuje się następująca zależność

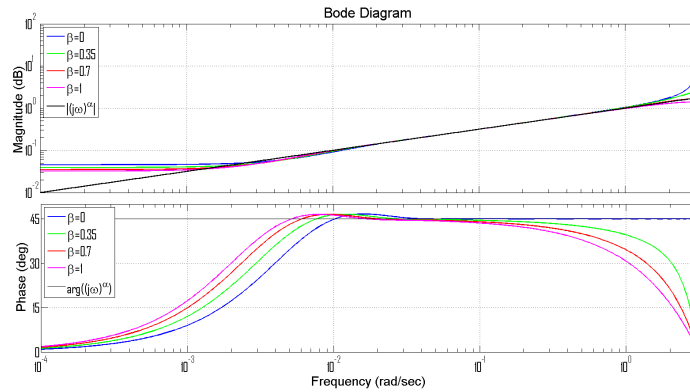
$$s^\alpha \approx \Delta^\alpha(z) = \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha CFE \left\{ \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^\alpha \right\} \quad (3.2)$$

gdzie  $z$  to operator transformaty  $\mathcal{Z}$ , a CFE oznacza rozwinięcie CFE (ang. *Continous Fractional Expansion*). Alternatywnie dyskretyzacja modelu Tustina może opierać się na algorytmie Muira. Wówczas model wyznacza zależność

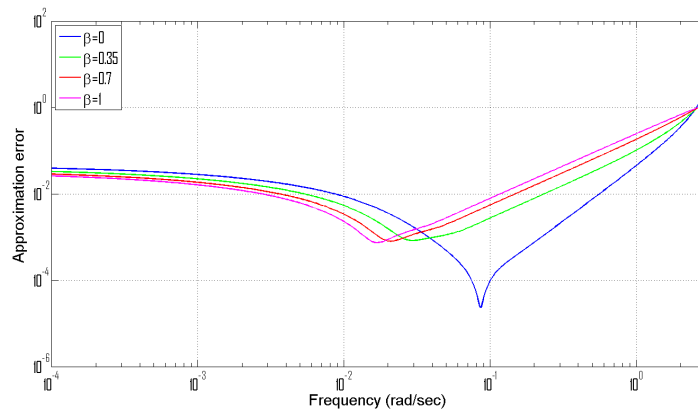
$$s^\alpha \approx \Delta^\alpha(z) = \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha \frac{A_n(z^{-1}, \alpha)}{A_n(z^{-1}, -\alpha)} \quad (3.3)$$

gdzie  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $A_n(z^{-1}, \alpha)$  i  $A_n(z^{-1}, -\alpha)$  są wielomianami rzędu  $n$ , których współczynniki są wyznaczone rekursywnie

$$A_n(z^{-1}, \alpha) = A_{n-1}(z^{-1}, \alpha) - \gamma_n z^{-n} A_{n-1}(z, \alpha) \quad (3.4)$$



Rysunek 3.1: Wykresy Bodego dla aproksymacji Al-Alaoui’ego dla różnicy rzędu  $\alpha = 0,5$ , czasem próbkowania  $T = 1$ , długością implementacji  $o = 15$  i różnymi wartościami  $\beta$ .



Rysunek 3.2: Błędy aproksymacji Al-Alaoui’ego dla różnicy rzędu  $\alpha = 0,5$ , czasem próbkowania  $T = 1$ , długością implementacji  $o = 15$  i różnymi wartościami  $\beta$ .

przy czym

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{\alpha}{n} & n \text{ is odd} \\ 0 & n \text{ is even} \end{cases}$$

oraz

$$A_0(z^{-1}, \alpha) = 1$$

Alternatywną metodą, która łączy metody Tustina i CFE jest dyskretyzacja Al-Alaoui’ego. Dyskretyzator ten jest charakteryzowany przez dodatkowy współczynnik wagowy  $\beta$ . Dla pochodnej niecałkowitego rzędu równanie aproksymatora opartego na CFE dla dyskretyzatora Al-Alaoui’ego jest następujące

$$s^\alpha \approx \Delta^\alpha(z) = \left( \frac{2}{(1+\beta)T} \right)^\alpha CFE \left\{ \left( \frac{1-z^{-1}}{1 + \frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}z^{-1}} \right)^\alpha \right\} \quad (3.5)$$

gdzie  $0 \geq \beta \geq 1$ . Można zauważyć, że dla  $\beta = 0$  otrzymujemy dyskretyzację PSE, a dla  $\beta = 1$  metodę Tustina. Standardowo wartość współczynnika  $\beta$  określa się na  $\beta = 0.75$ . Jednak w pracy poddano analizie, jak wartości tego współczynnika wpływają na aproksymację różnicy.

**Przykład 3.1.** Rozważmy pochodną rzędu ułamkowego rzędu  $\alpha = 0.5$ . Okres próbkowania wynosi  $T = 1$ , a długość implementacji operatora Al-Alaoui’ego  $o = 15$ . Na Rys. 3.1 przedstawiono charakterystykę odpowiedzi częstotliwościowej pochodnej rzędu ułamkowego  $D^\alpha$  oraz przybliżenie Al-Alaoui dla różnych wartości współczynnika  $\beta$ .

Rysunki 3.1-3.2 pokazują, że odpowiedź częstotliwościowa dyskretyzacji Al-Alaoui jest zależna od współczynnika  $\beta$ . W zakresie niskich częstotliwości, najlepsze wyniki uzyskuje się przyjmując współczynnik  $\beta = 1$ , który daje rozwinięcie Eulera i jest szczególnym przypadkiem metody Al-Alaoui. Można powiedzieć, że rozwinięcie Eulera jest najlepszym wyborem w aproksymacji pochodnej ułamkowego rzędu w zakresie niskich częstotliwości zarówno dla charakterystyk wielkości, jak i fazy. W przypadku wysokich częstotliwości sytuacja jest bardziej skomplikowana. Wykresy amplitudy i fazy należy rozpatrywać oddzielnie. Wykresy amplitudy dla  $\beta \approx 1$  i dla  $\beta \approx 0$  dają odpowiednio zbyt niskie i zbyt wysokie wartości. Z badań wynika, że optymalny współczynnik wagowy dla wysokich częstotliwości wynosi  $\beta = 0,7$ . Z drugiej strony, patrząc na charakterystyki fazowe dla zakresu wysokich częstotliwości, najlepsze wyniki dają  $\beta \approx 0$ , więc podejście Tustina wydaje się być najlepszym wyborem dla tego zakresu.

W dalszej części zostanie pokazany wpływ współczynnika  $\beta$  na dokładność aproksymacji modelu Al-Alaoui'ego. Błąd aproksymacji charakterystyki amplitudy, zdefiniowano jako średniokwadratowy błąd amplitudy i średni bezwzględny błąd amplitudy, jak pokazano poniżej

$$MSAE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\omega_i=\omega_1}^{\omega_N} (|(\omega_i)^\alpha| - |\omega(e^{j\omega_i})|)^2} \quad (3.6)$$

$$MAAE = \frac{1}{N} \sum_{\omega_i=\omega_1}^{\omega_N} ||(\omega_i)^\alpha| - |\omega(e^{j\omega_i})|| \quad (3.7)$$

gdzie  $\omega_i \in (\omega_{min}, \omega_{max})$  dla  $i = 1, \dots, N$ . Ustalona częstotliwość w badaniach mieści się w przedziale od  $\omega = 10^{-4}$  do  $\omega = \pi$ . Wykresy konturowe średniokwadratowego błędu amplitudy i średniego bezwzględnego błędu amplitudy dla  $\beta = var$  i  $\alpha = var$  przedstawiono na Rys. 3.3 - 3.4. Białe plamy na tym wykresie pokazują niestabilność schematów aproksymacji Al-Alaoui'ego.

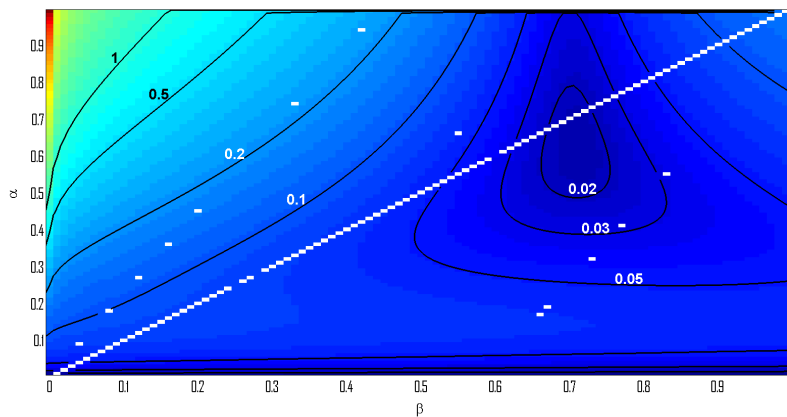
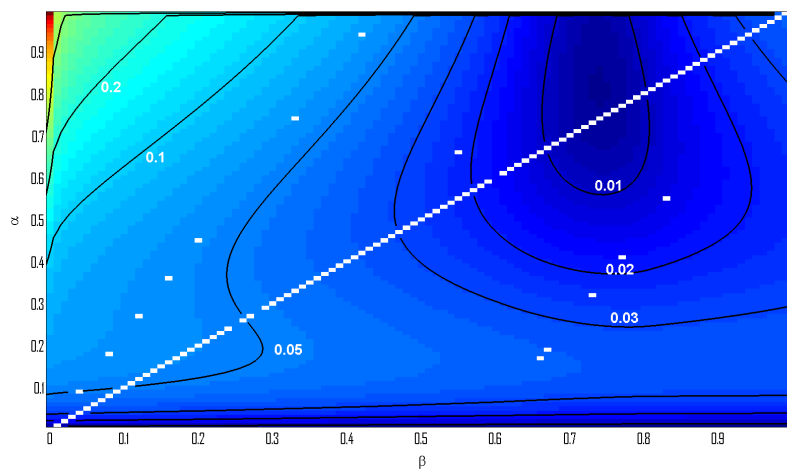
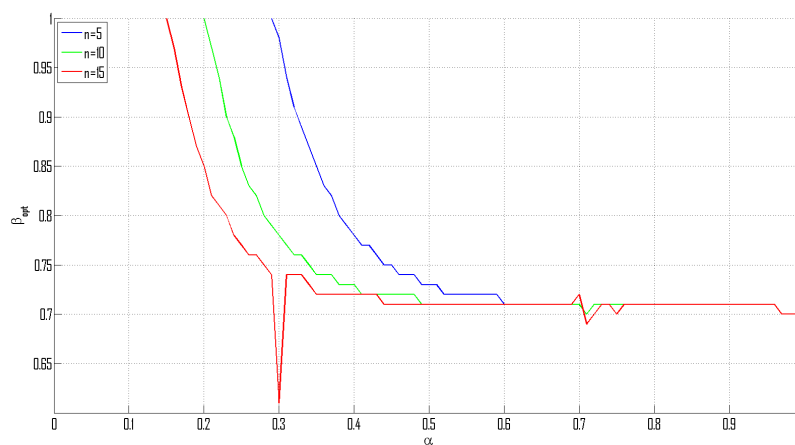
Istotnym wynikiem wynikającym z Rys. 3.3-3.5 są a) wykazanie wpływu wartości współczynnika  $\beta$  na dokładność aproksymacji dla określonych wartości rzędów pochodnej oraz b) wyznaczenie zależności optymalnej wartości tego współczynnika w funkcji rzędu pochodnej.

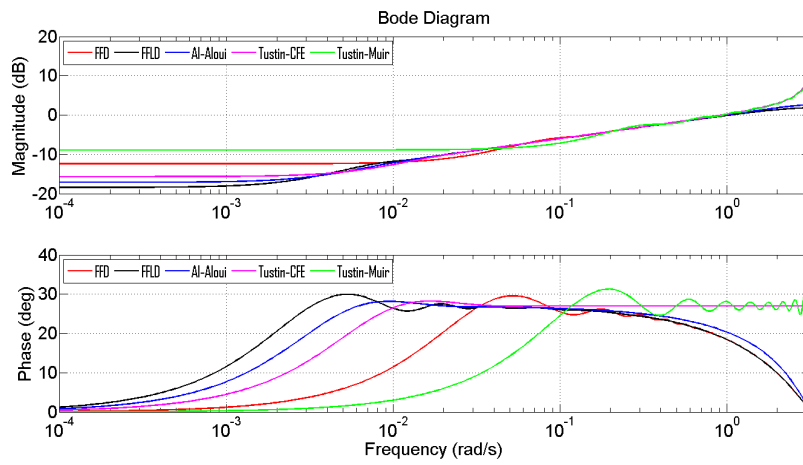
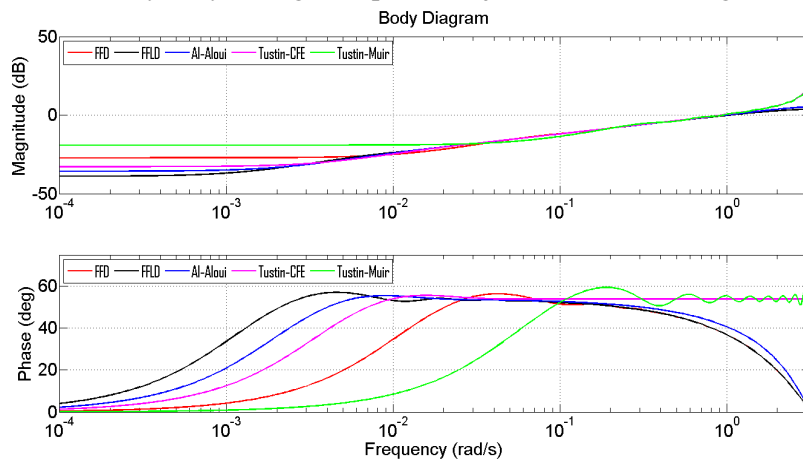
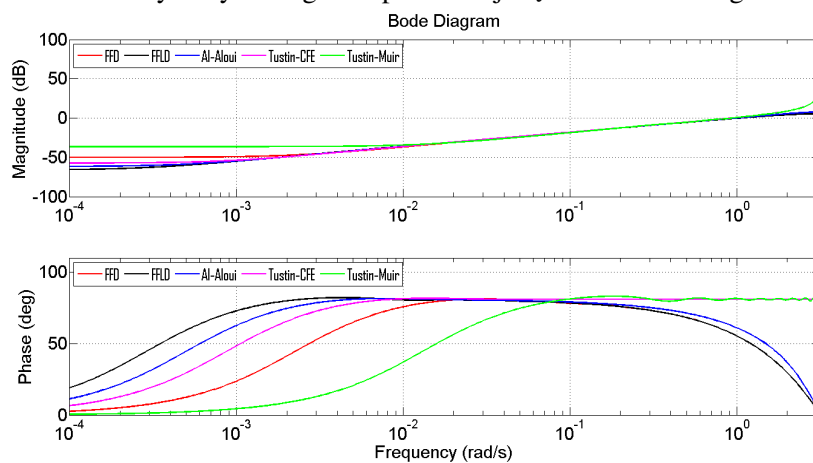
## Analiza efektywności

W pracy poddano analizie porównawczej różne aproksymatory różnicy niecałkowitego rzędu, zarówno w dziedzinie częstotliwości, jak i czasu.

**Przykład 3.2.** Rozważmy różnicę rzędu ułamkowego rzędu  $\alpha = 0,3, 0,6$  i  $0,9$ . Różnicę modelujemy za pomocą a) modelu FFD ( $J = 50$ ) b) modelu FFLD ( $z M = 10, J = 10$  i biegunem Laguerre'a  $p = 0,96$ ), c) modelu Al-Alaoui ( $z \beta = 0,75$  i długością implementacji  $o = 15$ ), d) modelu Tustina-CFE ( $z o = 15$ ) oraz modelu Tutstin-Muir ( $z o = 15$ ). Odpowiedzi częstotliwościowe poszczególnych aproksymatorów przedstawiono na Rys. 3.6, Rys. 3.7 i Rys. 3.8. Błędy amplitudy odpowiedzi częstotliwościowej poszczególnych modeli, wyrażone jako odchylenie standardowe w zakresie częstotliwości  $\omega \in (10^{-4}, \pi)$  przedstawiono w Tabeli 3.1.

W Tabeli 3.1 i na Rys. 3.6 - 3.8 można zauważyć, że tylko przybliżenie oparte na modelu Tustina zapewnia doskonałą wydajność modelowania kątów odpowiedzi częstotliwościowej w zakresie wysokich częstotliwości. Jednak podejście Tustin-CFE jest bardziej skuteczne. Doskonałe przybliżenie kąta odbywa się kosztem niedokładnego przybliżenia modułu i niskiej adekwatności w zakresach niskich częstotliwości. Modele FFD (ang. Finite Fractional Difference) i FFLD (ang. Finite Fractional-Laguerre-based Difference) dają zadowalające wyniki aproksymacji modułu, ale modelowanie kąta daje znaczne błędy w zakresach wysokich częstotliwości. Podejście FFLD ma najszerszy zakres częstotliwości, gdzie model daje zadowalające wyniki, zwłaszcza w zakresie podejścia modułowego. Podejście FFD nie daje jednak zadowalających rezultatów, ale należy zauważyć, że powszechnie wiadomo, że długość implementacji modelu FFD powinna być wielokrotnie większa. W tym modelu uzyskujemy doskonałą wydajność

Rysunek 3.3: Wykres konturowy błędu  $MSAE$  dla  $\beta$ ,  $\alpha = var$ .Rysunek 3.4: Wykres konturowy błędu  $MAAE$  dla  $\beta$ ,  $\alpha = var$ .Rysunek 3.5: Optymalna wartość współczynnika  $\beta$  jako funkcja rzędu pochodnej  $\alpha$ .

Rysunek 3.6: Wykresy Bodego dla pochodnej rzędu niecałkowitego z  $\alpha = 0.3$ .Rysunek 3.7: Wykresy Bodego dla pochodnej rzędu niecałkowitego z  $\alpha = 0.6$ .Rysunek 3.8: Wykresy Bodego dla pochodnej rzędu niecałkowitego z  $\alpha = 0.9$ .

modele	FFLD	AL-Alaoui	Tustin-CFE	Tustin-Muir	FFD
długość impl.	M=10; J=10	o=15	o=15	o=15	J=50
Laguerre pole	0.96	-	-	-	-
$\alpha$	0.3				
STD	1.463	1.867	2.522	4.990	3.762
$\alpha$	0.6				
STD	2.212	3.200	4.558	9.453	6.500
$\alpha$	0.9				
STD	1.351	2.251	4.777	11.206	6.142

Tablica 3.1: Properties of discretizations schemes shown in figure 3.6.

modelowania, gdy  $J > 1000$ . Podejście Al-Alaoui’ego uzyskuje również zadowalające wyniki dzięki szerokiemu zakresowi adekwatności. Finalnie, biorąc pod uwagę wyniki analizy odpowiedzi częstotliwościowej, możemy polecić zastosowanie aproksymatorów FFLD i Al-Alaoui’ego. Również Tustin-CFE daje zadowalające wyniki, zwłaszcza w zakresie aproksymacji kątów odpowiedzi częstotliwościowej.

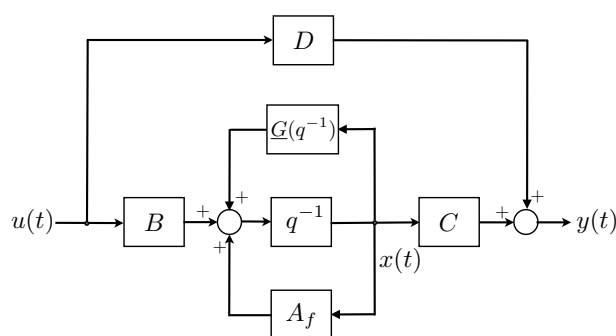
Kluczowym zagadnieniem rozpatrywanym w Rozdziale 3 była analiza porównawcza efektywności różnych schematów dyskretyzacji dla pochodnych niecałkowitego rzędu. Jednak bezpośrednie porównanie modeli jest trudne. Podczas aproksymacji różnicy należy pamiętać, że z jednej strony mała liczba parametrów jest dobra z punktu widzenia złożoności obliczeniowej, ale z drugiej strony prowadzi do znaczących błędów aproksymacji. Najprostszym schematem dyskretyzacji wydaje się PSE, ale jego struktura FIR wymaga dużej liczby parametrów, do uzyskania wysokiej adekwatności. Metody całkowania trapezoidalnego oparte na operatorze Tustina prowadzą do struktury IIR o małej liczbie parametrów, ale jego dokładność zależy od konkretnej aplikacji. Metoda Tustin-CFE jest bardzo efektywna, ale generuje pewne problemy numeryczne dla wysokich długości implementacji. Podejście rekurencyjne Tustina-Muira jest mniej efektywne dla ekwiwalentnych długości implementacji w porównaniu z metodą Tustina-CFE, ale podejście Tustina-Muira nie ma żadnych ograniczeń dotyczących długości implementacji. Oznacza to, że dla bardzo wysokich rzędów implementacji dokładność w dziedzinie częstotliwości może być znacznie wyższa niż w metodach Tustin-CFE. Ponadto wykazano w pracy, że stosując niektóre techniki redukcji modeli, można uzyskać dobrą aproksymację różnicy przy niskim rzędzie całkowitym modelu. Metodą łączącą dwie opisane powyżej metody (PSE i Tustina) jest operator Al-Alaoui’ego. Operator Al-Alaoui’ego jest określony przez stały współczynnik wagowy, którego wartość może wpływać na udział metod Eulera i Tustina w schemacie dyskretyzacji Al-Alaoui’ego. W pracy pokazano dobór współczynnika wagowego tej metody dyskretyzacji do rzędu modelowanej różnicy. Inne przedstawione schematy dyskretyzacji bazują na swoistym schemacie dyskretyzacji PSE. Jak wspomniano, w przypadku stosowania tego typu dyskretyzacji konieczne do uzyskania dokładnej aproksymacji jest zastosowanie wysokiej długości implementacji, do prowadzi do znacznych nakładów obliczeniowych. Dlatego podejścia oparte na filtrach Laguerre’a w postaci FLD i CFLD są wysoce konkurencyjne w kontekście wydajności obliczeniowej i wysokiej dokładności aproksymacji. Co więcej, te podejścia są obliczeniowo efektywniejsze od opartych na optymalizacji konkurentów rozpatrywanych w pracach [24, 81].

## Rozdział 4

# Systemy niecałkowitego rzędu

W Rozdziale 4 przedstawiono wyniki implementacji pochodnej i różnicy ułamkowego rzędu w układach dynamicznych. Najpierw przedstawiono implementację różnic ułamkowych rzędów i ich aproksymację do systemów przestrzeni stanów w czasie dyskretnym. Następnie przedstawiono model Laguerre'a ułamkowego rzędu. Główna część wyników oparta jest na ref. [81, 80], ale także przedstawiono nowe, niepublikowane wyniki analizy modeli Laguerre'a uwzględniających aproksymacje oparte na operatorach Tustina i Al-Alaoui'ego. W kolejnej części rozdziału przedstawiono nowy model, będący 'ułamkowym' uogólnieniem modelu FIR, tzw. model oparty na ułamkowych funkcjach różnicowych (ang. *Fractional Difference Basis Functions – FDBF*). W kolejnej części rozdziału przedstawiono metody estymacji parametrów oraz przeprowadzono szczegółową analizę porównawczą powyższych modeli.

W rozdziale w pierwszej kolejności dokonano implementacji pochodnych niecałkowitego rzędu w systemie opisanym w przestrzeni stanu. Schemat blokowy implementacji przedstawiono na Rys. 4.1.



Rysunek 4.1: Schemat blokowy regularnego/frakcyjnego układu w przestrzeni stanów.

W pracy rozważane były zarówno układy jedno-wejście jedno-wyjście (SISO) jak również wiele-wyjść (MIMO). W tej części pracy zastosowano metody aproksymacji różnicy w postaci:

- dyskretyzacja oparta na schemacie PSE,
- dyskretyzacja oparta na schemacie PSE przesunięta w przód,
- dyskretyzacja oparta na schemacie Tustina przesunięta w przód,
- dyskretyzacja oparta na schemacie Al-Alaoui przesunięta w przód.

Zagadnieniem które rozpatrywano w pracy była również implementacja pochodnej niecałkowitego rzędu przy pomocy funkcji bazy orthonormalnej (ang. *Orthonormal Basis Function - OBF*) z wykorzystaniem filtrów Laguerre'a. Główna część tego zagadnienia bazuje na pracach [81, 80], gdzie opisany jest proces cały proces faktoryzacji filtrów Laguerre'a. W tej części pojawiają się również wcześniej

niepublikowane wyniki obejmujące modele Laguerre'a zawierające aproksymację Tustina czy też Al-Alaoui'ego. Rozwiązanie to bazuje na wykorzystaniu ciągłego rozwinięcia ułamkowego (CFE) operatora Tustina lub Al-Alaoui'ego w zadaniu aproksymacji różnicy niecałkowitego rzędu w równaniach filtrów Laguerre'a. Opierając się na faktoryzacji filtrów Laguerre'a możemy opisać filtry za pomocą transmitancji  $G_L^f(q^{-1})$  oraz  $G_R^f(q^{-1})$  gdzie:

$$G_L^f:$$

$$\Delta^\alpha y_L(t, J) = (P-1)y_L(t)q^{-1} + \underline{k}u(t)q^{-1}$$

$$\Delta^\alpha y_L(t, J) = y_L(t) + Y_L(t, J, M)$$

$$G_R^f:$$

$$\Delta^\alpha Y_R^i(t, J) = (P-1)y_R^i(t)q^{-1} + \underline{k}^2 U_i(t)q^{-1}$$

$$\Delta^\alpha y_R^i(t, J) = y_R^i(t) + Y_R^i(t, J, M) \quad i = 1, \dots, K-1$$

gdzie  $Y_L(t)$  oraz  $Y_R(t)$  mają postać przedstawioną poniżej

$$Y_L(t, J, M) = \left[ 1 - \frac{\tilde{B}(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \right] y_L(t)$$

$$Y_R^i(t, J, M) = \left[ 1 - \frac{\tilde{B}(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \right] y_R^i(t)$$

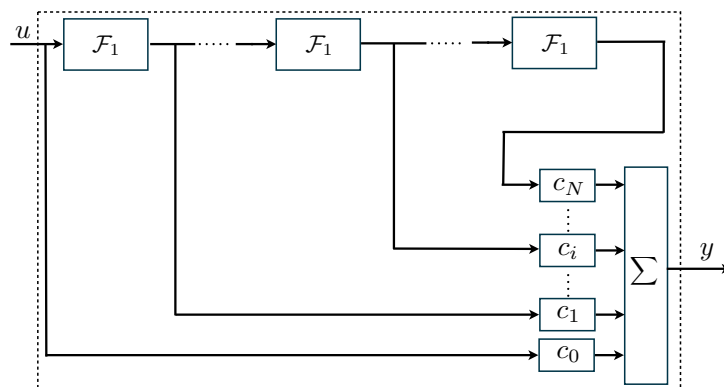
przy czym  $\frac{\tilde{B}(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}$ , więc aproksymacji Tustina oraz Al-Alaoui'ego możemy zapisać w postaci:

$$\frac{\tilde{B}(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} = \frac{1}{2^\alpha} CFE \left\{ \left( \frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}} \right) \right\} \text{ dla aproksymacji opartej na schemacie Tustina,}$$

$$\frac{\tilde{B}(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} = \left( \frac{1-\beta}{2} \right)^\alpha CFE \left\{ \left( \frac{1-q^{-1}}{1+\frac{1-\beta}{1+\beta}q^{-1}} \right) \right\} \text{ dla aproksymacji opartej na schemacie Al-Alaoui'ego.}$$

Należy podkreślić że filtry Laguerre'a niecałkowite/ułamkowego rzędu mogą być z powodzeniem wykorzystywane w modelowaniu zarówno układów niecałkowitego/ułamkowego rzędu, jak i w przypadku systemów klasycznych (całkowitego rzędu).

W pracy został również wprowadzony heurystyczny model będący frakcyjnym uogólnieniem klasycznego modelu FIR, który z powodzeniem opisuje dowolny dyskretny system LTI. Koncepcja modelowania systemów skończoną odpowiedzią impulsową pozwala nam modelować system z dowolnie zadaną dokładnością i jest zdefiniowana następująco



Rysunek 4.2: Schemat blokowy modelu FDBF.



$$\hat{G}_{FIR}(z^{-1}) = \sum_{i=0}^N c_i z^{-i}$$

gdzie  $N$  jest długością modelu, a  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  to parametry odpowiedzi impulsowej. Układ ten można przedstawić w postaci przesuniętej różnicy wstecznej

$$G(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (1 - \Delta(z^{-1}))^i$$

Biorąc pod uwagę, że  $\mathcal{F}_i(z^{-1}) = (1 - \Delta(z^{-1}))^i$  otrzymamy

$$\hat{G}(z^{-1}) = \sum_{i=1}^N c_i \mathcal{F}_i(z^{-1})$$

gdzie  $\mathcal{F}_i$  jest bazą opartą n różnicy wstecznej (ang. *Fractional-Difference Basis Functions -FDBF*). Fundamentem dla funkcji bazowej różnicy niecałkowitego/ułamkowego rzędu jest generalizacja polegająca na wprowadzeniu różnicy niecałkowitego w równaniach funkcji bazowych  $\mathcal{F}_i(z^{-1}) = (1 - \Delta^\alpha(z^{-1}))^i$ . W dysertacji zostały przyjęte następujące implementacje różnicy niecałkowitego/ułamkowego rzędu

$$\hat{\mathcal{F}}_i = \hat{\mathcal{F}}_i^{FFD} = \left[ -\sum_{j=1}^L (-1)^j \binom{\alpha}{j} q^{-j} \right]^i - \text{aproxymacja skończonej różnicy frakcyjnej (FFD),}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_i = \hat{\mathcal{F}}_i^{Tus} = \left[ 1 - \frac{1}{2^\alpha} CFE \left\{ \left( \frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}} \right)^\alpha \right\} \right]^i - \text{aproxymacja oparta na schemacie Tustina,}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_i = \hat{\mathcal{F}}_i^{Al} = \left[ 1 - \left( \frac{1+\beta}{2} \right)^\alpha CFE \left\{ \left( \frac{1-q^{-1}}{1+\frac{1+\beta}{2}q^{-1}} \right)^\alpha \right\} \right]^i - \text{aproxymacja oparta na schemacie Al-Alaoui,}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_i = \hat{\mathcal{F}}_i^{LD} = \left[ \sum_{j=1}^M c_j L_j(q^{-1}) \right]^i - \text{aproxymacja oparta na filtrach Laguerre'a,}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_i = \hat{\mathcal{F}}_i^{CFLD} = \left[ \sum_{j=1}^J (-1)^j \binom{\alpha}{j} y_L(t) q^{-j} + \sum_{j=1}^M c_j q^{-j} L_j(q^{-1}) \right]^i - \text{aproxymacja oparta na modelu FFLD.}$$

Istotną zaletą modelu opartego na w/w FDBF jest fakt, że równanie modelu może być łatwo przedstawione w postaci liniowego równania regresji. Dzięki temu jego parametry mogą być łatwo estymowane popularnymi metodami jak np. metoda najmniejszych kwadratów (ang. *Least Squares - LS*), również w wersji rekursywnej/adaptacyjnej (ang. *Recursive/Adaptive Least Squares - RLS/ALS*).

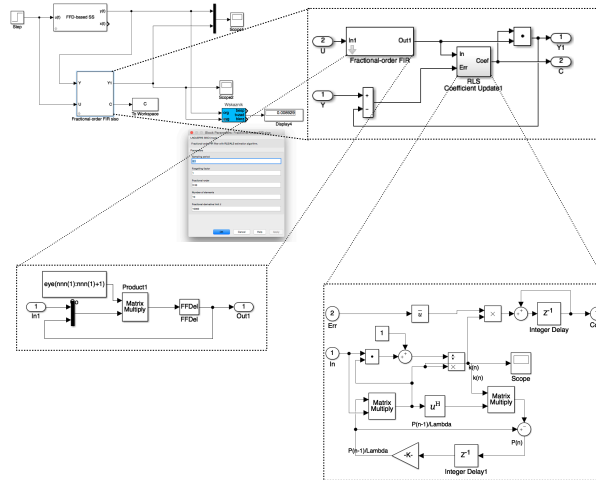
W pracy przeprowadzono również obszerną analizę efektywności poszczególnych modeli systemów niecałkowitego rzędu. Analizie poddano zarówno modele heurystyczne tj. frakcyjne modele Laguerre'a i modele oparte na FDBF, jak również układy opisane w przestrzeni stanu. Wybrane, przykładowe wyniki z przedmiotowej analizy przedstawiono poniżej.

## Analiza efektywności

**Przykład 4.1.** Rozważmy system w przestrzeni stanu z następującymi parametrami

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.15 & -0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.85 \end{bmatrix}, C = [-0.823 \quad 1], D = [0] \quad (4.1)$$

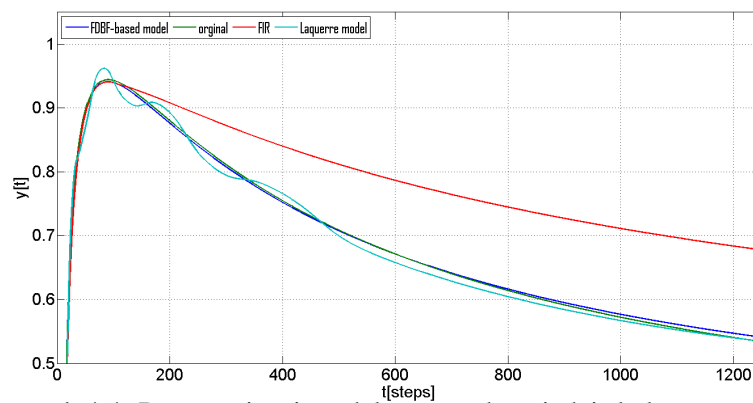
i rzędem różnicy  $\alpha = 0.7$ . Powyższy system jest modelowany przy użyciu modelu opartego na FDBF na następujących parametrach  $\alpha = 0,39$  i  $N = 10$ . Parametry estymowane są zmetodą najmniejszych kwadratów. Rys. 4.3 przedstawia implementację modelu w środowisku Matlab/Simulink.



Rysunek 4.3: Implementacja modelu FDBF w środowisku Matlab/Simulink.

	FIR model	Laguerre model	FDBF-based model
MSPE	3.824	0.1055	0.01903

Tablica 4.1: Błąd MSPE poszczególnych modeli.



Rysunek 4.4: Rzeczywiste i modelowane odpowiedzi skokowe systemu.

Analiza porównawcza efektywności modelu opartego na FDBF, modelu FIR ( $N = 100$ ) oraz modelu Laguerre'a (z  $M = 10$  i optymalnym biegunem Laguerre'a równym  $p = 0,99$ ) i modelem FIR została przedstawiona w Tabeli 4.1. Wykresy rzeczywistych i modelowanych odpowiedzi skokowych przedstawiono na Rys. 4.4.

Z Tabeli 4.1 i Rys. 4.4 wynika, że model oparty na FDBF daje najlepsze wyniki w sensie MSPE w porównaniu z innymi, takimi jak modele FIR i Laguerre'a. Wyniki modelu Laguerre'a, w którym eksperymentalnie wyznaczono wartość bieguna dominującego  $p$  generował pięciokrotnie większe błędy niż model FDBF. Natomiast błędy modelu FIR były 200 razy większe. Warto wspomnieć, że wartość rzędu ułamkowego  $\alpha$  w modelu FDBF wynosi 0,36, choć ułamkowy rząd modelowanego systemu wynosi 0.7. W wielu badaniach eksperymentalnych zaobserwowano, że dokładność modelu Laguerre'a jest prawie zawsze mniejsza niż dokładniejszych modeli opartych na FDBF. Wyniki rozważanych modeli przedstawione w dziedzinie czasu są w pełni potwierdzone charakterystykami w dziedzinie częstotliwości.

## Rozdział 5

# Modele nieliniowe blokowo-zorientowane niecałkowitego rzędu

W Rozdziale 5 poruszono zagadnienie modelowania nieliniowych układów blokowo-zorientowanych niecałkowitego/ułamkowego rzędu. Trzy najprostsze i najczęściej używane nieliniowe modele blokowo-zorientowane były rozważane w pracy, tj:

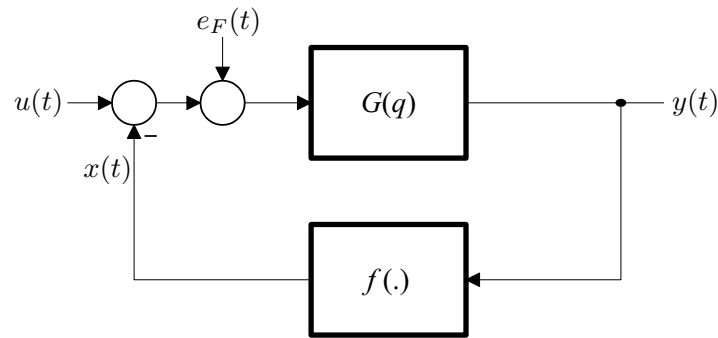
- Model Wienera, który polega na kaskadowym połączeniu liniowego układu dynamicznego z nieliniowością statyczną.
- Model Hammersteina składający się z kaskadowego połączenia nieliniowości statycznej i liniowego układu dynamicznego.
- Model z nieliniowością w sprzężeniu zwrotnym, który składa się ze statycznej nieliniowości w sprzężeniu zwrotnym i liniowego układu dynamicznego w torze głównym.

W rozdziale rozpatrywano systemy z jednym wejściem i jednym wyjściem (SISO). We wszystkich rozpatrywanych przypadkach do modelowania części statycznej nieliniowej zastosowano rozwinięcie wielomianowe i radialne funkcje bazowe (ang. *Radial Basis Functions*). Natomiast do modelowania części dynamicznej zastosowane zostały frakcyjne wersje modeli Laguerre'a, oraz (w przypadku modelu Hammersteina i z nieliniowością w sprzężeniu zwrotnym) użyto koncepcję modelowania inwersyjnego OBF (ang. *Orthonormal Basis Functions*). [75, 69, 76, 77, 40]. W przypadku modelowania układów nieliniowych niecałkowitego/ułamkowego rzędu blokowo-zorientowanych autor nie może podać ogólnych zaleceń dotyczących stosowania określonych metodologii. Optymalna koncepcja modelowania w tym przypadku zależy bowiem od właściwości modelowanego procesu. W autoreferacie scharakteryzowany w skrócie zostanie model z nieliniowością w sprzężeniu zwrotnym, gdyż do niego można zastosować zarówno koncepcję modelowania prostego, jak i odwrotnego OBF.

System nieliniowy ze sprzężeniem zwrotnym należy do grupy systemów nieliniowych zorientowanych blokowo. W systemie tego typu wyjście liniowej części dynamicznej powraca do wejścia poprzez statyczną nieliniowość, co pokazano na Rys. 5.1. Cały system można wyrazić równaniem

$$\begin{aligned} y(t) &= G(q) [u(t) - f(y(t)) + e_F(t)] \\ &= G(q) [u(t) - x(t) + e_F(t)] \end{aligned} \tag{5.1}$$

gdzie  $G(q)$  opisuje część dynamiczną liniową,  $f(\cdot)$  reprezentuje część statyczną nieliniową, oraz  $e_F(t)$  jest niemierzalnym zakłóceniem.



Rysunek 5.1: System z nieliniowością w sprzężeniu zwrotnym.

### Modelowanie 'regularne' OBF

Model ze sprzężeniem zwrotnym może zostać opisany równaniem [39, 78, 38]

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^M C_i L_i(q) (u(t) - f[y(t)]) \quad (5.2)$$

Jako model dynamiczny można wykorzystać wprowadzony wcześniej model Laguerre'a niecałkowitego rzędu. Dynamika systemu w tym ujęciu charakteryzowana jest przez biegun dominujący  $p$  i rząd różnicy  $\alpha$ . Aby przybliżyć nieliniową część układu  $f(\cdot)$  można zastosować dobrze znane rozwinięcie wielomianowe

$$f(y(t)) = a_1 y(t) + a_2 y^2(t) + \dots + a_m y^m(t) \quad (5.3)$$

gdzie  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , są nieznanymi parametrami modelu. W tym przypadku, łącząc równania (5.2) i (5.3) otrzymujemy model układu z nieliniowością w sprzężeniu zwrotnym

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^M C_i L_i(q) u(t) - \sum_{i=1}^M C_i L_i(q) \sum_{j=1}^m a_j y^j(t) \quad (5.4)$$

Równanie (5.4) może zostać teraz przedstawione w postaci

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^M C_i U_i(t) - \sum_{i=1}^M C_i \sum_{j=1}^m a_j \underline{U}_{i,j}(t) \quad (5.5)$$

gdzie  $U_i(t)$  jest wyznaczane z równania (5.4), przy czym  $y_L(t) = G_L^f(q^{-1})u(t)$  i  $y_R^i(t) = G_R^f(q^{-1})U_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, K-1$ , oraz

$$\underline{U}_{i,j}(t) = \begin{cases} G_L^f(q) y^j(t) & i = 1 \\ y_R^{i-1}(t) - P U_{i-1}(t) & i = 2, \dots, K \end{cases} \quad (5.6)$$

Ostatecznie model równania może (5.6) może zostać przedstawiony w postaci liniowego równania regresji, przez co jego parametry mogą być łatwo estymowane metodami stosowanymi dla systemów liniowych

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t) \Theta \quad (5.7)$$

gdzie  $\varphi^T(t) = [U_1(t) \dots U_M(t) - \underline{U}_{1,1}(t) \dots - \underline{U}_{M,1}(t) \dots - \underline{U}_{1,m}(t) \dots - \underline{U}_{M,m}(t)]$ . Wektor nieznanych parametrów wynosi  $\theta^T = [C_1 \dots C_M \quad w_{11} \dots w_{1M} \quad w_{21} \dots w_{2M} \dots w_{m1} \dots w_{mM}]$ , gdzie  $w_{ji} = C_i a_j$ ,  $i = 1, \dots, M$  i  $j = 1, \dots, m$ .

### Modelowanie inwersyjne OBF

Podjęcie inwersyjne OBF można wykorzystać do modelowania liniowej części dynamicznej. W tej koncepcji równanie modelu jest następujące

$$R(q)\hat{y}(t) = u(t) - x(t) \quad (5.8)$$

gdzie  $R(q)$  jest reprezentowany przez model FIR w postaci  $R(q) = r_0q^d + r_1q^{d-1} + \dots + r_d + r_{d+1}q^{-1} \dots + r_{L-1}q^{-L+d+1}$ , który jest odwrotnością modelu systemu  $\hat{G}(q)$ , gdzie  $d$  oznacza opóźnienie czasowe. W podejściu inwersyjnym OBF odwrotność systemu reprezentowana przez  $R(q)$  jest modelowana przez OBF. Finalnie równanie (5.1) można przedstawić w postaci [78]

$$y(t) + \sum_{i=1}^M C_i L_i(q) y(t) = \beta_0 [u(t-d) - x(t-d)] + e(t) \quad (5.9)$$

gdzie  $\beta_0 = r_0^{-1}$  i  $e(t) = \beta_0 e_F(t)$  jest błędem równaniowym. Biorąc pod uwagę, że część nieliniowa jest opisana rozwinięciem wielomianowym (Eqn. (5.3)), cały system może być opisany równaniem

$$y(t) + \sum_{i=1}^M C_i L_i(q) y(t) = \beta_0 \left[ u(t-d) - \sum_{j=1}^m a_j y^j(t-d) \right] + e(t) \quad (5.10)$$

Podstawiając  $\underline{a}_j = \beta_0 a_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ostatecznie wyjście z modelu może być opisane następującą zależnością

$$y(t) = \beta_0 u(t-d) - \sum_{i=1}^M C_i L_i(q) y(t) - \sum_{j=1}^m \underline{a}_j y^j(t-d) + e(t) \quad (5.11)$$

Biorąc pod uwagę równania (5.11) i (5.6) otrzymamy

$$\hat{y}(t) + \underline{a}_1 y(t-d) = \beta_0 u(t-d) - \sum_{i=1}^M C_i \underline{U}_{i,1} - \sum_{j=2}^m \underline{a}_j y^j(t-d) \quad (5.12)$$

gdzie  $\underline{U}_{i,1}$ ,  $i = 1, \dots, M$  są takie jak w równaniu (5.6). Model z równania (5.12) w postaci liniowego równania regresji jest następujący

$$\hat{y}(t) + \underline{a}_1 y(t-d) = \boldsymbol{\varphi}^T(t) \boldsymbol{\Theta} \quad (5.13)$$

gdzie  $\boldsymbol{\Theta}^T = [\beta_0 \ C_1 \ \dots \ C_M \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_m]$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^T(t) = [u(t-d) \ - \ \underline{U}_1(t) \ \dots \ - \ \underline{U}_M(t) \ y^2(t) \ \dots \ y^m(t)]$  z  $\underline{a}_i = \beta_0 a_i$  and  $\underline{U}_{i,1}(t)$ ,  $i = 1, \dots, M$ .

**Przykład 5.1.** Rozważmy nieliniowy system ze sprzężeniem zwrotnym niecałkowitego rzędu w czasie dyskretnym, w którym nieliniowość statyczna jest opisana przez  $f(u(t)) = u^3(t)$ , a część dynamiczna rzędu ułamkowego reprezentowana jest w przestrzeni stanów

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha x(t+1) &= A_f x(t) + B u(t), \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

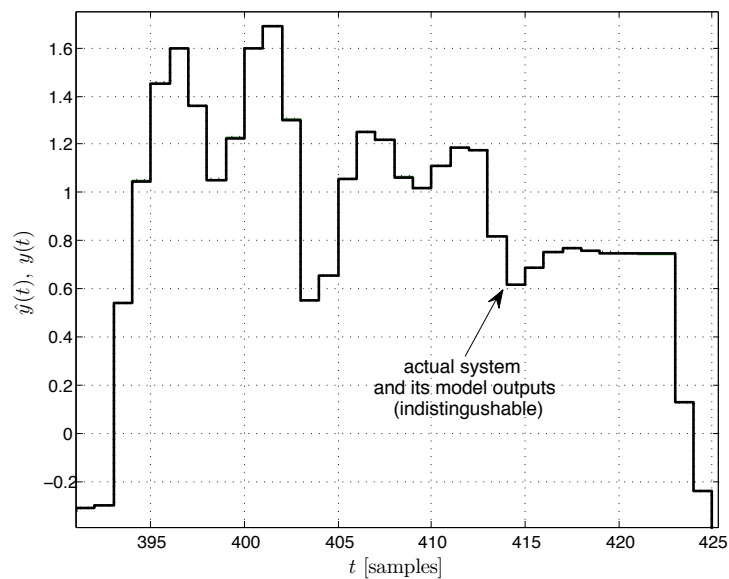
i parametrami

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} -0.4 & -0.03 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= [0 \quad 0.23], \quad D = [0], \\ \alpha &= 0.5 \end{aligned}$$

Tablica 5.1: Błędy MSPE dla nieliniowego modelu ze sprzężeniem zwrotnym.

$\bar{J}$	50	100	200	1000
MSPE	8.36e-3	3.96e-3	2.24e-3	2.00e-3

Część dynamiczna systemu jest modelowana za pomocą inwersyjnego modelu Laguerre'a rzędu ułamkowego, z dominującym biegunem  $P = 0,49$ ,  $\alpha = 0,7$ ,  $M = 8$ ,  $m = 4$  i zmienną długością implementacji aproksymacji FFD ( $\bar{J}$ ). Wybrane wyniki MSPE dla modelu przedstawiono w Tabeli 5.1. Rys. 5.2 przedstawia przebiegi czasowe wyjścia modelu i systemu. Należy zauważyć, że rzeczywisty i modelowany sygnał wyjściowy nieliniowego systemu ze sprzężeniem zwrotnym jest praktycznie nierozróżnialny, co potwierdza bardzo dobre własności aproksymacyjne modelu.



Rysunek 5.2: Przebiegi czasowe rzeczywistych i modelowanych wyników nieliniowego systemu ze sprzężeniem zwrotnym rzędu ułamkowego.

Należy zaznaczyć, że w autoreferacie przedstawiono tylko jeden przykład nieliniowego modelu blokowo-zorientowanego w postaci systemu ze sprzężeniem zwrotnym. W pełnej wersji pracy przedstawiono wyniki dla trzech wymienionych na wstępie modeli nieliniowych. Ponadto w pracy przedstawiono również wyniki dla implementacji modeli RBF do modelowania statycznej części nieliniowej.

## Rozdział 6

# Sterowanie predykcyjne/adaptacyjne oparte na modelach niecałkowitego rzędu

Ostatnia merytoryczna część dysertacji poświęcona jest sterowaniu predykcyjnemu w oparciu o nieliniowe układy niecałkowitego/ułamkowego rzędu. Badania prowadzone były w oparciu o strategię sterowania predykcyjnego z rozszerzonym horyzontem. Główny problem sterowania układami niecałkowitego rzędu polega na tym że algorytm predykcji, w ogólnym przypadku ma nieskończony wymiar. W literaturze jednak można znaleźć metody oparte skończonej implementacji różnicy Grünwalda-Letnikova [84], czy podejścia oparte na filtrach Laguerre'a [82]. W/w predyktory można z łatwością zastosować w dowolnej strategii sterowania predykcyjnego w postaci algorytmów EHPC (Extended Horizon Predictive Control), EHMAL (Extended Horizon Model Algorithmic Control), czy też GPC/UPC (Generalized Prediction Control/Unified Predictive Control). W pracy analizie poddano różne implementacje predyktorów stanu/wyjścia, w tym predyktor 1) opisany równaniem w przestrzeni stanu bazujące na różnicy skończonej różnicy niecałkowitego/ułamkowego rzędu (FD/FFD), 2) predyktor bazujący na modelu zredukowanym w przestrzeni stanu i 3) predyktor oparty na frakcyjnych filtrach Laquerre'a.

Predyktor stanu oparty na skończonej różnicy niecałkowitego/ułamkowego rzędu (FD/FFD) dla horyzontu predykcji  $H \geq d + 1$  ma postać

$$x(t+H) = \phi(H)x(t) + \sum_{h=0}^{H-1} \phi(h) \left[ \underline{X}_{H-h-1}(t+H-h, J) + Bu(t+H-h-d-1) \right]$$

gdzie

$$\underline{X}_{H-h-1}(t+H-h, J) = - \sum_{i=H-h+1}^J (-1)^i \binom{\alpha}{i} x(t+H-h-i)$$

macierz  $\phi(h)$  jest wyliczana w sposób rekurencyjny, jak to zostało przedstawione poniżej

$$\phi(h) = A_\alpha \phi(h-1) - \sum_{i=2}^h (-1)^i \binom{\alpha}{i} \phi(h-i) \quad h = 2, \dots, H$$

z  $\phi(0) = I$  i  $\phi(1) = A_\alpha$ ,  $J$  oznacza górną aproksymacji pochodnej niecałkowitego/ułamkowego rzędu.

Predyktor bazujący na modelu zredukowanym w przestrzeni stanu ma postać

$$\tilde{x}_r(t+H) = \tilde{A}_r^H \tilde{x}_r(t) + \sum_{h=1}^H \tilde{A}_r^{h-1} \tilde{B}_r u(t+H-h)$$

Predyktor wyjścia, który może zostać wyliczony na podstawie predyktora stanu jest zdefiniowany jako

$$\tilde{y}_r(t+H) = \tilde{C}_r \tilde{x}_r(t+H)$$

Predyktor wyjścia oparty na modelu FFLD postać

$$y(t+H) = \tilde{C}\tilde{U}(t+H)$$

dla

$$\tilde{U}(t+H) = \tilde{\Omega}^H \tilde{U}(t) + \sum_{h=1}^H \tilde{\Omega}^{h-1} \tilde{I}u(t+H-h)$$

gdzie  $\tilde{I} \in \mathfrak{R}^{K(J+M) \times 1}$  oznacza wektor jedności  $\tilde{I} = [1, 0, \dots, 0]^T$ ,  $\tilde{U}(t) = [U(t), X(t)]^T$ ,  $\tilde{U}(t) \in \mathfrak{R}^{K(J+M) \times 1}$ ,  $X(t) \in \mathfrak{R}^{K(J+M-1) \times 1}$  jest wektorem nie mającym wpływu na predyktor oraz

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega} & -\beta_2 & \dots & -\beta_{J-1} & -\beta_J & -c_1 I & -c_2 I & -c_3 I & \dots & -c_M I \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & kI & pI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (-p)kI & k^2 I & pI & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (-p)^2 kI & (-p)k^2 I & k^2 I & pI & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (-p)^{M-1} kI & (-p)^{M-2} k^2 I & (-p)^{M-3} k^2 I & (-p)^{M-4} k^2 I & \dots & pI \end{bmatrix}$$

z parametrami  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, M$  zdefiniowanymi jak dla modelu FFLD. Biorąc pod uwagę, że  $I$  i  $0$  przedstawia macierz jednostkową i zerową owymiarach  $K \times K$ , macierz  $\underline{\Omega} \in \mathfrak{R}^{K \times K}$  jest zdefiniowana następująco

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} P-1+\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{k}^2 & P-1+\alpha & 0 & \dots & 0 \\ (-P)\underline{k}^2 & \underline{k}^2 & P-1+\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-P)^{K-2}\underline{k}^2 & (-P)^{K-3}\underline{k}^2 & (-P)^{K-4}\underline{k}^2 & \dots & P-1+\alpha \end{bmatrix}$$

Predyktor stanu wyjścia modelu Hammersteina w oparciu o modelowanie inwersyjne z wykorzystaniem uogólnienia modelu FFLD ma postać

$$\tilde{Y}(t+H) = [\tilde{\Omega} - I\tilde{C}]^H \tilde{Y}(t) + \sum_{h=1}^H [\tilde{\Omega} - I\tilde{C}]^{h-1} I \sum_{i=1}^m a_i u^i(t+H-h-d)$$

W predyktorze część nieliniowa systemu modelowana jest za pomocą rozwinięcia wielomianowego.

Predyktor stanu wyjścia modelu Hammersteina w oparciu o model RBF ma postać

$$\tilde{Y}(t+H) = [\tilde{\Omega} - I\tilde{C}]^H \tilde{Y}(t) + \sum_{h=1}^H [\tilde{\Omega} - I\tilde{C}]^{h-1} I \frac{1}{r_0} \sum_{i=1}^m w_i \phi_i(u(t+H-h-d))$$

W/w predyktory mogą być zastosowane w różnych zadaniach sterowania predykcyjnego. W pracy przeprowadzono implementację w/w predyktorów w algorytmie sterowania EHPC1. Poniżej przedstawiono jeden wybrany przykład rozpatrywany w pracy

**Przykład 6.1.** Rozważmy układ niecałkowitego rzędu w przestrzeni stanu z rzędem różnicy  $\alpha = 0.72$  i



parametrami

$$A = \begin{bmatrix} -0.52 & -0.6872 & -0.27176 & -0.02562 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

W rozpatrywanym systemie opóźnienie czasowe wynosi  $d = 4$ . W Tabeli 6.1 przedstawiono wyniki znormalizowanych średniokwadratowych błędów predykcji dla regulatora EHPC1 dla różnych horyzontów predykcji  $H$  i długości implementacji FFD  $J$ . W tabeli 6.1 możemy zobaczyć znormalizowane średniokwadratowe błędy predykcji (NMSPE1) dla przypadku deterministycznego i stochastycznego (NMSPE2). Tabela 6.2 pokazuje średniokwadratowe błędy predykcji dla EHPC1, gdy predyktor stanu jest oparty na modelu BTA, gdy  $J = 500$ , z różnymi wartościami  $H$  i  $k$ . Podobnie jak poprzednio przedstawiono NMSPE1 dla przypadku deterministycznego oraz NMSPE2 dla przypadku stochastycznego. Jak można

Tablica 6.1: Błąd NMSPE regulatora EHPC1 dla zmiennych  $H, J$ .

H	Regulator type	NMSPE1	NMSPE2	Comp.efforts [kFlops]
4	EHPC1 ( $J = 500$ )	0.2874	0.2981	256.7
	EHPC1 ( $J = 200$ )	0.2881	0.2986	103.1
	EHPC1 ( $J = 50$ )	0.3068	0.3165	26.31
	EHPC1 ( $J = 20$ )	0.3705	0.3794	10.95
16	EHPC1 ( $J = 500$ )	0.5080	0.8460	4099
	EHPC1 ( $J = 200$ )	0.5141	0.8460	1641
	EHPC1 ( $J = 50$ )	0.6190	0.9134	412.4
	EHPC1 ( $J = 20$ )	0.9820	1.225	166.6

Tablica 6.2: Błąd NMSPE regulatora EHPC1 dla różnych  $H$  i  $k$ .

H	Regulator type	NMSPE1	NMSPE2	Comp.efforts [kFlops]
4	EHPC1 ( $k = 8$ )	0.2874	0.2981	4.656
	EHPC1 ( $k = 6$ )	0.2878	0.2982	2.052
	EHPC1 ( $k = 4$ )	0.2881	0.2993	0.664
	EHPC1 ( $k = 3$ )	(unstable)	(unstable)	0.306
16	EHPC1 ( $k = 8$ )	0.5080	0.8460	18.67
	EHPC1 ( $k = 6$ )	0.5081	0.8472	8.244
	EHPC1 ( $k = 4$ )	0.5082	0.8460	2.680
	EHPC1 ( $k = 3$ )	0.7598	1.022	1.242

zauważyć w Tabelach 6.1 i 6.2 sterowanie EHPC1 oparte na modelach układu niecałkowitego rzędu uzyskanego za pomocą narzędzi redukcji całego systemu jest znacznie bardziej efektywny niż sterowanie oparte na predyktorach układów z implementacją różnic niecałkowitego rzędu. Można zauważyć, że zastosowanie narzędzi redukcji prowadzi do znacznie mniejszych nakładów obliczeniowych i wyższej dokładności.

W Rozdziale 6 przedstawiono wiele innych badań efektywności regulatorów EHPC dla różnych klas układów. W przedmiotowym autoreferacie zaprezentowano tylko przykładowe symulacje.

# Rozdział 7

## Podsumowanie

W niniejszej rozprawie przedstawiono nowe wyniki w zakresie modelowania zarówno liniowych, jak i nieliniowych blokowo-zorientowanych układów ułamkowego rzędu zdefiniowanych w czasie dyskretnym z zastosowaniem do zadań predykcji i sterowania predykcyjnego. W tym obszarze koncentruje się ujęciu merytorycznym praca skupiła się na trzech podstawowych nurtach obejmujących a) modelowanie różnicy niecałkowitego rzędu z zastosowaniem różnych aproksymatorów, b) modelowanie liniowych i nieliniowych systemów niecałkowitego rzędu oraz c) opracowanie nowych algorytmów predykcji i sterowania predykcyjnego z zastosowaniem opracowanych modeli.

Badania w zakresie pierwszego w/w nurtu, dokonano w Rozdziale 3. Konceptyjnie najprostszym schematem dyskretyzacji jest tzw. PSE (ang. Power Series Expansion), jednak jego struktura w postaci FIR (ang. Finite Impulse Response) wymaga relatywnie wielu parametrów do osiągnięcia wysokiej dokładności. Z drugiej strony metody realizujące dyskretyzację w oparciu o operator Tustina prowadzą do aproksymatora struktury IIR o stosunkowo małej liczbie parametrów, szczególnie w przypadku zastosowania rozwinięcia CFE (ang. Continuous Fraction Expansion). Jednak metoda Tustin-CFE może generować pewne problemy numeryczne dla modeli o większej długości implementacji. Inne podejście implementacji dyskretyzatora Tustina implementuje rozwinięcie rekurencyjne Muira jest mniej efektywne w kontekście szybkości zbieżności modelu, ale nie ma ograniczeń dotyczących długości implementacji. Dzięki temu możemy stosować bardzo wysokie rzędy modelowania. W pracy również pokazano, że stosowanie narzędzi redukcji systemów w oparciu o postać zbalansowaną (ang. Balanced Truncation Approximation) również prowadzi do efektywnej aproksymacji różnic i dyskretnych całek niecałkowitego rzędu za pomocą modeli całkowitego rzędu. Trzecim analizowanym w pracy schematem dyskretyzacji jest metoda Al-Alaoui'ego, będąca liniową kombinacją podejścia PSE i Tustina. Operator Al-Alaoui jest określony przez dodatkowy współczynnik wagowy, którego wartości wpływają na właściwości schematu dyskretyzacji Al-Alaoui. Zwykle wartość tego współczynnika wynosi zwykle 0.75 lub 0.25. W rozprawie pokazano, że optymalna wartość współczynnika jest zależna od wartości rzędu pochodnej/różnicy niecałkowitego rzędu. Innym aproksymatorem pochodnej rozważanym w pracy to podejście oparte na filtrach Laguerre'a. Pokazano, że takie podejście również prowadzi do dużej dokładności aproksymacji różnicy rzędu ułamkowego.

Modelowanie liniowych systemów niecałkowitego rzędu z zastosowaniem aproksymatorów różnic niecałkowitego rzędu przedstawiono w Rozdziale 4. W pracy analizowano różne implementacje różnic w modelach układów niecałkowitego rzędu. W tym zakresie skupiono się na układach prezentowanych w przestrzeni stanu. W pracy również poddano analizie model heurystyczny oparty na 'frakcyjnych' wersjach filtrów Laguerre'a. W pracy pokazano, że model ten może być skutecznie wykorzystany do identyfikacji systemów zarówno ułamkowych, jak i całkowitych. Wg. autora dysertacji, głównym osiągnięciem rozdziału jest propozycja nowego modelu ułamkowego rzędu, który jest uogólnieniem modelu FIR. Model oparty jest na tak zwanych funkcjach bazowych różnic ułamkowych (ang. Fractional Difference Basis Functions - FDBF), które można łatwo uzyskać z różnych przybliżeń różnicy rzędu

ułamkowego. Należy zauważyć, że dla rzędu modelu wynoszącego jeden, model oparty na FDBF jest równoważny klasycznemu modelowi FIR. Eksperymenty symulacyjne wykazują dużą dokładność rozważanych modeli układów ułamkowego rzędu.

Wyniki modelowania wybranych liniowych układów dyskretnych rzędu ułamkowego zastosowano do nieliniowych układów blokowo-zorientowanych przedstawiono w Rozdziale 5. W rozprawie analizowane są układy Hammersteina, Wienera i układy nieliniowe ze sprzężeniem zwrotnym. Liniowy dynamiczny liniowy podsystem jest modelowany przy użyciu modelu Laguerre'a ułamkowego rzędu. Jednak w modelowaniu układów Hammersteina i układu z nieliniowością w sprzężeniu zwrotnym zastosowano koncepcję modelowania odwrotnego OBF. Z drugiej strony system Wienera stosuje regularne modelowanie OBF i aproksymację odwrotności nieliniowości.. Wszystkie rozpatrywane nieliniowe modele zorientowane blokowo są ostatecznie przedstawiane w postaci regresji liniowej, co prowadzi do implementacji klasycznych, liniowych metod estymacji, takich jak rekurencyjna/adaptacyjna metoda najmniejszych kwadratów. Wyniki analizy symulacyjnej pokazują, że zaproponowane modele mogą skutecznie modelować nieliniowe układy ułamkowego rzędu.

Merytoryczna część pracy kończy się implementacją różnych modeli rzędu ułamkowego w budowaniu regulatorów predykcyjnych (Rozdział 6). W celu uzyskania kontrolerów zaproponowano różne predyktory rzędu ułamkowego, oparte na a) systemie przestrzeni stanów opartym na FD/FFD, b) predyktorach opartych na przestrzeni stanów wykorzystujących metody redukcji rzędu modelu, c) predyktorach opartych na modelach Laguerre'a ułamkowego rzędu. Predyktor modelu Laguerre'a ułamkowego rzędu został rozszerzony na nieliniowy system zorientowany blokowo Hammersteina. Finalnie, wspomniane powyżej predyktory zostały zastosowane w zadaniu opracowania regulatorów predykcyjnych z rozszerzonym horyzontem predykcji (EHPC). Badania symulacyjne pokazują, że zastosowane modele prowadzą do wysokiej skuteczności sterowania EHPC. W szczególności model przestrzeni stanu oparty na redukcji kolejności modeli generuje wysoką dokładność i niską złożoność obliczeniową. Również schemat sterowania EHPC oparty na heurystycznym modelu Laguerre'a ułamkowego rzędu prowadzi do zadowalających wyników.

Na podstawie powyższych wniosków można stwierdzić, że zarówno teza pracy, jak również hipoteza badawcza zostały udowodnione.

## Rozdział 8

# Lista publikacji doktoranta

- 1 Gałek M.: „Frequency domain characteristics of selected fractional-order systems” - Zeszyty naukowe Politechniki Opolskiej serii Elektryka, z. 69 nr 350/2013.
- 2 Gałek M., Stanisławski R., Latawiec K.J., Łukaniszyn M.: „Frequency domain characteristics of selected RC networks modeled by fractional-order equations” - XXXVI IC-SPETO, Ustroń, 2013, pp. 41-42.
- 3 Stanisławski R., Gałek M., Latawiec K.J., Łukaniszyn M.: „Modeling of selected RC networks via fractional-order equation” - PES, Kościelisko 24-28.VI.2013.
- 4 Gałek M.: „Charakterystyki czasowe układów dynamicznych opisanych równaniem różniczkowym niecałkowitego rzędu” - Prace doktorantów Clanky doktorantu, Zeszyt naukowy 2013.
- 5 Stanisławski R., Gałek M., Latawiec K.J., Łukaniszyn M.: „Discrete step responses of a selected RC network modeled by fractional-order equations” - XXXVI IC-SPETO, Maj 2014, Ustroń.
- 6 Gałek M.: „Modelling of a nonlinear system by a fractional-order OBF-based Wiener model” - Zeszyty naukowe Politechniki Opolskiej serii Elektryka, z. 70 nr 351/2014.
- 7 Stanisławski R., Latawiec K.J., Łukaniszyn M., Gałek M., Czuczvara W.: „Zastosowanie dyskretnych filtrów Laquerre’a do modelowania różnicy niecałkowitego rzędu” - PES, Kościelisko 16-20.VI.2014.
- 8 Stanisławski R., Gałek M., Latawiec K.J., Łukaniszyn M.: „Modeling and identification of a fractional-order discrete-time Laguerre-Hammerstein system” - 23th International Conference on Systems Engineering (ICSENG 2014), Las Vegas, USA, 2014.
- 9 Stanisławski R., Latawiec K.J., Gałek M., Łukaniszyn M.: „Modeling and identification of a fractional-order discrete-time SISO Laguerre-Wiener system” - 19th International Conference On Methods And Models In Automation And Robotics (MMAR), 2014.
- 10 Stanisławski R., Latawiec K.J., Gałek M., Łukaniszyn M.: „Modeling and identification of fractional-order discrete-time Laguerre-based feedback-nonlinear systems” - Lecture Notes in Electrical Engineering, vol. 458, Springer, Germany, 2015.
- 11 Gałek M.: „A comparative analysis of two modelling and estimation methods for nonlinear characteristics of the Hammerstein system” - Zeszyty naukowe Politechniki Opolskiej serii Elektryka, z. 71 nr 352/2015.

- 12 Gałek M.: „Modelowanie nieliniowych systemów dynamicznych z wykorzystaniem frakcyjnych funkcji bazy ortonormalnej oraz sztucznych sieci neuronowych, na przykładzie modelu Wienera” - Prace doktorantów Clanky doktorantu, Zeszyt naukowy 2015.
- 13 Stanisławski R., Latawiec K.J., Łukaniszyn M., Gałek M.: „Time-domain approximations to the Grunwald-Letnikov difference with application to modeling of fractional-order state space systems” - 20th International Conference On Methods And Models In Automation And Robotics (MMAR), 2015.
- 14 Stanisławski R., Latawiec K.J., Łukaniszyn M., Gałek M.: „Linear finite fractional difference predictors for model predictive control” - IEEE Conference on Control Applications (CCA), 21-23 Jun 2015, Sydney Australia.
- 15 Gałek M., Olczak A.: „A comparative analysis of Tustin-based discretizers for fractional-order derivative in frequency-domain” - Zeszyty naukowe Politechniki Opolskiej serii Elektryka, z. 72 nr 353/2016.
- 16 Stanisławski R., Rydel M., Gałek M.: „Implementation issues in discretization of fractional-order derivative using the Al-Alaoui operator” - 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 27.08-01.09 2016 Międzyzdroje, pp. 844-847.
- 17 Rydel M., Stanisławski R., Gałek M., Latawiec K.J.: „Modeling of Fractional-Order Integrators and Differentiators Using Tustin-Based Approximations and Model Order Reduction Techniques” - 8th Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications, 20-21.09 2016 Zakopane, Theory and Applications of Non-integer Order Systems., 2017, Springer pp. 277-286.
- 18 Stanisławski R., Rydel M., Latawiec K.J., Łukaniszyn M., Gałek M.: „A comparative analysis of two methods for model predictive control of fractional-order systems” - 22nd International Conference On Methods And Models In Automation And Robotics (MMAR), 2017, pp 159-163.
- 19 Rydel M., Stanisławski R., Latawiec K.J., Gałek M.: „Model order reduction of commensurate linear discrete-time fractional-order systems” - IFAC-PapersOnLine Vol. 51, Issue 1, pp 536-541.
- 20 Stanisławski R., Latawiec K.J., Rydel M., Łukaniszyn M., Gałek M.: „Predictive Control of Linear Fractional-Order Systems Based on Discrete-Time Fractional-Order Laguerre Filters” - 23rd International Conference On Methods And Models In Automation And Robotics (MMAR), 2018, pp 110-113.
- 21 Gałek M., Stanisławski R., Rydel M., Latawiec K.J., Łukaniszyn M.: „Fractional-order Difference Basis Functions-a new modeling concept for dynamical systems” - 24th International Conference On Methods And Models In Automation And Robotics (MMAR), 2019, pp 255-258.

# Bibliografia

- [1] ANATOLY A.K., HARI M.S., JUAN J.T. , *Mathematics Studies*. Elsevier, 2006, no. 204.
- [2] BAGLEY R.L., CALICO R.A. , Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, no. 2, 1991, pp. 304–311.
- [3] BATTAGLIA J.L., COIS O., PUIGSEGURA L., OUSTALOUP A. , Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 44, 2001, pp. 2671–2680.
- [4] BRZEZIŃSKI D. W., Fractional order derivative and integral computation with a small number of discrete input values using grünwald–letnikov formula, *International Journal of Computational Methods*, vol. 17, no. 05, 2020, p. 1940006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1142/S0219876219400061>
- [5] BUSŁOWICZ M., Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, vol. 56, no. 4, 2008, pp. 319–324.
- [6] BUSŁOWICZ M., RUSZEWSKI A., Necessary and sufficient conditions for stability of fractional discrete-time linear state-space systems, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, vol. 61, no. 4, 2013, pp. 779–786.
- [7] CAPONETTO R., FORTUNA L., PORTO D. , Parameter tuning of a non integer order PID, 2002.
- [8] CARLSON G., HALIJAK C , Approximation of fractional capacitors  $(1/s)^{1/n}$  by a regular Newton process, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 11, 1964, pp. 210–213.
- [9] CHEN Y.Q. , Ubiquitous fractional order controls? *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, 2006, pp. 481–492.
- [10] DOEHRING T.C., FREED A.D., CAREW E.O., VESELY I. , Fractional order viscoelasticity of the aortic valve cusp: An alternative to quasilinear viscoelasticity, *Journal of Biomechanical Engineering*, 2005.
- [11] DOMEK S., Fuzzy predictive control of fractional-order nonlinear discrete-time systems, *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 5, no. 2, 2011, pp. 23–26.
- [12] DOMEK S., Switched fractional state-space predictive control methods for non-linear fractional systems, in *Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications*, ser. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, 2019, vol. 559, pp. 113–127.
- [13] DOMEK S., Switched state model predictive control of fractional-order nonlinear discrete-time systems, *Asian Journal of Control*, vol. 15, no. 3, 2013, pp. 658–668. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asjc.703>

- [14] DUGOWSON S. , Les différentielles métaphysiques (histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation), Master's thesis, Université Paris Nord, 1994.
- [15] DZIELIŃSKI A., CZYRONIS P. M., Fixed final time and free final state optimal control problem for fractional dynamic systems – linear quadratic discrete-time case, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, vol. 61, no. 3, 2013, pp. 681–690.
- [16] DZIELIŃSKI A., CZYRONIS P. M., Optimal control problem for fractional dynamic systems – linear quadratic discrete-time case, in *Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems*, ser. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, 2013, vol. 257, pp. 87–97.
- [17] DZIELIŃSKI A., SIEROCIUK D., SARWAS G., Some applications of fractional order calculus, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, vol. 58, no. 4, 2009, pp. 583–592.
- [18] DZIELIŃSKI A., SIEROCIUK D., Stability of discrete fractional order state-space systems, *Journal of Vibration and Control*, vol. 14, no. 9-10, 2008, pp. 1543–1556.
- [19] DZIELIŃSKI A., SIEROCIUK D., Ultracapacitor modelling and control using discrete fractional order state-space model, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 13, no. 1, 2008, pp. 136–145.
- [20] FREEBORN T. J., MAUNDY B., ELWAKIL A. S., Measurement of supercapacitor fractional-order model parameters from voltage excited step response, *IEEE J. Emerging Sel. Topics on Circuits Systems*, vol. 3, no. 3, 2013, pp. 367–376.
- [21] GHAMISI P., COUCEIRO M.S., BENEDIKTSSON J.A., FERREIRA N.M.F. , An efficient method for segmentation of images based on fractional calculus and natural selection, *Expert Systems with Applications*, vol. 39, 2012.
- [22] GORENFLO R., MAINARDI F. , Random walk models for space-fractional diffusion processes, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 1, no. 2, 1998, pp. 167–191.
- [23] GRÜNWARD A.K. , Über "begrenzte" derivationen und deren anwendung, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1867, pp. 441–480.
- [24] GUPTA M., YADAV R. , New improved fractional order differentiator models based on optimized digital differentiators, *The Scientific World Journal*, vol. 2014, Article ID 741395, 2014.
- [25] HEAVISIDE O. , *Electromagnetic Theory*. London "The Electrician" Printing and publishing company, 1894-1912, vol. I-III.
- [26] JESUS I.S., MACHADO J.A.T. , Application of integer and fractional models in electrochemical systems, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, 2012.
- [27] KACZOREK T., Positivity and reachability of fractional electrical circuits, *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 5, no. 2, 2011.
- [28] KACZOREK T., *Selected Problems of Fractional Systems Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2011.
- [29] KACZOREK T., Zeroing of state variables in fractional descriptor electrical circuits by state-feedbacks, *Archives of Electrical Engineering*, vol. 63, no. 3, 2014.
- [30] KACZOREK T., Standard and positive electrical circuits with zero transfer matrices, *Poznan University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering*, vol. 85, 2016, pp. 11–28.

- [31] KLAMKA J., Controllability of fractional discrete-time systems with delay, in *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria: Automatyka*, 2008, vol. 151.
- [32] KLAMKA J., Local controllability of fractional discrete-time semilinear systems, *acta mechanica et automatica*, vol. 5, no. 2, 2011, pp. 55–58.
- [33] KOPKA R., Discrepancy between derivative orders in fractional supercapacitor models for charging and discharging cycles, in *2018 23rd International Conference on Methods Models in Automation Robotics (MMAR)*, Aug 2018, pp. 567–572.
- [34] KOPKA R., Changes in derivative orders for fractional models of supercapacitors as a function of operating temperature, *IEEE Access*, vol. 7, 2019, pp. 47 674–47 681.
- [35] KOPKA R., Estimation of supercapacitor energy storage based on fractional differential equations, *Nanoscale Research Letters*, vol. 12, no. 1, 2017, p. 636. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1186/s11671-017-2396-y>
- [36] KRAJEWSKI W., VIARO U., A method for the integer-order approximation of fractional-order systems, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 1, 2014, pp. 555–564.
- [37] KRAJEWSKI W., VIARO U., A new method for the integer order approximation of fractional order models, in *THEORETICAL DEVELOPMENTS AND APPLICATIONS OF NON-INTEGER ORDER SYSTEMS*, ser. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, 2016, vol. 357, pp. 81–92.
- [38] LATAWIEC K.J. , *The Power of Inverse Systems in Linear and Nonlinear Modeling and Control*. Politechnika Opolska, 2004.
- [39] LATAWIEC K.J., MARCIAK C., STANISŁAWSKI R., OLIVEIRA G.H.C. , The metod separability principle in modeling of linear and nonlinear block oriented systems, in *Proceedings 10th IEEE MMAR Conference, Międzyzdroje, Poland, 2004*, pp. 479–484.
- [40] LATAWIEC K.J., STANISŁAWSKI R., HUNEK W.P., ŁUKANISZYN M. , Laguerre-based modeling of fractional-order LTI SISO systems, in *Proceedings of the 18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Poland, 2013*, pp. 64–69.
- [41] MATIGNON D., Stability properties for generalized fractional differential systems, *ESAIM Proceedings*, vol. 5, 1998, pp. 145–158.
- [42] METZLER R., KLAFTER J. , The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Physics Reports*, vol. 339, 2000, pp. 1–77.
- [43] MILLER KENNETH S., ROSS B. , An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, *New York : Wiley*, 1993.
- [44] MITKOWSKI W., BAUER W., ZAGOROWSKA M., Rc-ladder networks with supercapacitors, *ARCHIVES OF ELECTRICAL ENGINEERING*, vol. 67, no. 2, 2018, pp. 377–389.
- [45] OPRZEDKIEWCZ K., GAWIN E., MITKOWSKI W., A plc implementation of pse approximant for fractional order operator, in *NON-INTEGER ORDER CALCULUS AND ITS APPLICATIONS*, ser. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, 2019, vol. 496, pp. 102–112.
- [46] OPRZEDKIEWCZ K., MITKOWSKI W., GAWIN E., The plc implementation of fractional-order operator using cfe approximation, ser. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer, 2017, vol. 550.



- [47] OPRZĘDKIEWICZ K., MITKOWSKI W., Accuracy estimation of the approximated atangana-baleanu operator, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, vol. 18, no. 4, 2019, pp. 53–62. [Online]. Available: <https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.4.05>
- [48] OSTALCZYK P., A note on the Grünwald-Letnikov fractional-order backward-difference, *Physica Scripta*, vol. 136, 2009, paper ID: 014036.
- [49] OSTALCZYK P., Equivalent descriptions of a discrete-time fractional-order linear system and its stability domains, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 22, no. 3, 2012, pp. 533–538.
- [50] OSTALCZYK P., However: "differential-integral fractional-order calculus". riposte to ryszard sikora's article: "fractional derivatives in electrical circuit theory – critical remarks"(in polish), *Przełąd Elektrotechniczny*, vol. 93, no. 3, 2017, pp. 175–180.
- [51] OSTALCZYK P., The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis, *International Journal of System Science*, vol. 31, no. 12, 2000, pp. 1551–1561.
- [52] OUSTALOUP A., LEVRON F., NANOT F., Frequency band complex non integer differentiator: characterization and synthesis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, no. 1, 2000, pp. 25–40.
- [53] OUSTALOUP A., LEVRON F., MATHIEU B., NANOT F.M. , Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis, vol. 47, 2000.
- [54] PANAGOPOULOS H., ASTROM K.J., HAGGLUND T. , Design of PID controllers based on constrained optimisation, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 149, 2002, pp. 32–40.
- [55] PAWLUSZEWICZ E., Constrained controllability of the  $h$ -difference fractional control systems with caputo type operator, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2015, no. 638420, 2015.
- [56] PODLUBNY I., *Fractional differential equations*. Academic Press, Orlando, FL, 1999.
- [57] PODLUBNY I., DORCAK L., MISANEK J. , Application of fractional-order derivatives to calculation of heat load intensity changes in blast furnace walls, *Transactions of Technical University of Kosice*, vol. 5, no. 2, 1995, pp. 137–144.
- [58] PODLUBNY I., MAGIN R.L., TRYMORUSH I. , Niels Henrik Abel and the birth of fractional calculus, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 20, 2017.
- [59] PU Y.-F., YUAN X., Fracmemristor: Fractional-order memristor, *IEEE Access*, vol. 4, 2016, pp. 1872–1888.
- [60] QUINTANA J.J., RAMOS A. , Identification of the fractional impedance of ultracapacitors, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, 2006, pp. 432–436.
- [61] RIEMANN B. , Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation, *Mathematische Annalen*, vol. 16, 1880, pp. 81–82.
- [62] ROSS B. , Fractional calculus and its applications, in *Proceedings of the International Conference held at the University of New Haven*, 1974.

- [63] RYDEL M., New integer-order approximations of discrete-time non-commensurate fractional-order systems using the cross gramian, *Advances in Computational Mathematics*, vol. 45, 2019, pp. 631–653.
- [64] SIAMI M., TAVAZOEI M. S., HAERI M., Stability preservation analysis in direct discretization of fractional order transfer functions, *Signal Processing*, vol. 91, no. 3, 2011, pp. 508–512.
- [65] SIEROCIUK D., VINAGRE B. M., Infinite horizon state-feedback LQR controller for fractional systems, in *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Atlanta, GA*, 2010, pp. 10 824–10 829.
- [66] SIEROCIUK D., MALESZA W., MACIAS M., Derivation, interpretation, and analog modelling of fractional variable order derivative definition, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 13, 2015, pp. 3876–3888. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X14006702>
- [67] SIKORA R., Fractional derivatives in electrical circuit theory - critical remarks, *Archives of Electrical Engineering*, vol. 66, no. 1, 2017, pp. 155–163.
- [68] SKAAR S.B., MICHEL A.N., MILLER R.K. , Stability of viscoelastic control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, 1988, pp. 348–357.
- [69] STANISŁAWSKI R. , *Advances in modeling of fractional difference systems - new accuracy stability and computational results*. Politechnika Opolska, 2013.
- [70] STANISŁAWSKI R., Fractional systems: State-of-the-art, in *Fractional Dynamical Systems: Methods, Algorithms and Applications*, ser. Studies in Systems, Decision and Control. Springer, no. 402.
- [71] STANISŁAWSKI R., New results in stability analysis for LTI SISO systems modeled by GL-discretized fractional-order transfer functions, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 20, no. 1, 2017, pp. 243–259.
- [72] STANISŁAWSKI R., LATAWIEC K. J., Fractional-order discrete-time Laguerre filters – a new tool for modeling and stability analysis of fractional-order LTI SISO systems, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2016, 2016, pp. 1–9, Article ID: 9590687.
- [73] STANISŁAWSKI R., LATAWIEC K. J., ŁUKANISZYN M., GAŁEK M., Linear finite fractional difference predictors for model predictive control, in *IEEE Multiconference on Systems and Control (MSC)*, Sydney, Australia, September 2015, pp. 341–346.
- [74] STANISŁAWSKI R., LATAWIEC K. J., A modified Mikhailov stability criterion for a class of discrete-time noncommensurate fractional-order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 96, 2021, p. 105697.
- [75] STANISŁAWSKI R. , New Laguerre filter approximators to the Grünwald-Letnikov fractional difference, *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- [76] STANISŁAWSKI R., HUNEK W.P., LATAWIEC K.J. , Normalized finite fractional discrete-time derivative - a new concept and its application to OBF modeling, *Measurements, Automation and Monitoring*, vol. 57(3), 2011, pp. 241–243.
- [77] STANISŁAWSKI R., LATAWIEC K.J. , Modeling of open-loop stable linear systems using a combination of a finite fractional derivative and orthonormal basis functions, in *Proceedings of the 15th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Poland*, pp. 411–414.

- [78] STANISŁAWSKI R., LATAWIEC K.J. , Regular vs. inverse orthonormal basis functions concepts in identification of feedback-nonlinear systems by means of radial basis functions, *International Journal of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, no. 4, 2007, pp. 64–68.
- [79] STANISŁAWSKI R., LATAWIEC K.J. , Normalized finite fractional differences: Computational and accuracy breakthroughs, *Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 22, no. 4, 2012, pp. 907–919.
- [80] STANISŁAWSKI R., LATAWIEC K.J., GAŁEK M., ŁUKANISZYN M. , Modeling and identification of a fractional-order discrete-time SISO Laguerre-Wiener system, *19th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2014.
- [81] STANISŁAWSKI R., LATAWIEC K.J., ŁUKANISZYN M. , A comparative analysis of Laguerre-based approximators to the Grünwald-Letnikov fractional-order difference, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, Article ID 512104, March 2015.
- [82] STANISŁAWSKI R., LATAWIEC K.J., RYDEL M., ŁUKANISZYN M., GAŁEK M. , Predictive control of linear fractional-order systems based on discrete-time fractional-order laguerre filters, in *23rd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, Międzyzdroje, Poland. IEEE, 2018, pp. 110–113.
- [83] STANISŁAWSKI R., RYDEL M., LATAWIEC K.J. , Modeling of discrete-time fractional-order state space systems using the balanced truncation method. *Journal of the Franklin Institute*, vol. 354, August 2017, pp. 3008–3020.
- [84] STANISŁAWSKI R., RYDEL M., LATAWIEC K.J., ŁUKANISZYN M., GAŁEK M. , A comparative analysis of two methods for model predictive control of fractional-order systems. in *22th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, Międzyzdroje, Poland. IEEE, 2017.
- [85] TEPLJAKOV A., PETLENKOV E., BELIKOV J. (2011) FOMCON toolbox. [Online]. Available: <http://www.fomcon.net/>
- [86] VALERIO D., SA DA COSTA J. , Tuning-rules for fractional PID controllers, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, 2006, pp. 28–33.
- [87] VINAGRE B.M., FELIU V. , Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures, in *In Proceedings of 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002.
- [88] YI-FEI P. , Application of fractional differential approach to digital image processing, *Journal of Sichuan University*, 2007.
- [89] ZABOROVSKY V., MEYLANOV R. , Informational network traffic model based on fractional calculus, in *2001 International Conferences on Info-Tech and Info-Net. Proceedings*, vol. 6, 2001.