



POLITECHNIKA
OPOLSKA

Załącznik 2a
Autoreferat zawierający opis dorobku i
osiągnięć naukowych w języku polskim

Marek Rydel

SPIS TREŚCI

1	Imie i Nazwisko	3
2	Posiadane dyplomy, stopnie naukowe	3
3	Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych / artystycznych	3
4	Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki	3
4.1	Tytuł osiągnięcia naukowego	3
5	Opis celu naukowego i osiągniętych wyników	5
5.1	Wprowadzenie	5
5.2	Rozpatrywane modele niecałkowitego rzędu	7
5.3	Redukcja rzędu modelu	9
5.4	Redukcja rzędu modeli FIR [MR1, MR2, MR3]	11
5.4.1	Aproksymacja dyskretnych modeli całkowitego oraz niecałkowitego rzędu za pomocą modeli FIR	11
5.4.2	Redukcja metodą Balanced Truncation modeli FIR	12
5.4.3	Redukcja metodą Frequency Weighted modeli FIR aproksymujących złożone systemy całkowitego rzędu	13
5.4.4	Redukcja metodą cross gramian Frequency Weighted modeli FIR aproksymujących systemy niecałkowitego rzędu	16
5.5	Aproksymator ESS dyskretnego modelu niecałkowitego rzędu [MR5]	19
5.5.1	Redukcja metodą Balanced Truncation aproksymatorów ESS	20
5.6	Redukcja rzędu modelu niecałkowitego rzędu [MR4, MR7]	23
5.6.1	Redukcja metodą Balanced Truncation modeli niecałkowitego rzędu	24
5.6.2	Redukcja metodą Frequency Weighted modeli niecałkowitego rzędu	26
5.7	Optymalizacja wartości parametrów metod redukcji [MR6]	30
5.8	Podsumowanie osiągnięć naukowo-badawczych	32
6	Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych	37

1 IMIE I NAZWISKO

Marek Rydel

2 POSIADANE DYPLOMY, STOPNIE NAUKOWE

- Uzyskanie stopnia doktora nauk technicznych w dyscyplinie Automatyka i Robotyka
Data nadania stopnia: 16 kwiecień 2009
Nazwa jednostki, która nadała stopień: Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki. Politechnika Opolska
Tytuł rozprawy doktorskiej: *Zredukowane hierarchiczne modele złożonych obiektów sterowania na przykładzie kotła energetycznego*
Promotor: dr hab. inż. Włodzimierz Stanisławski, prof. PO
- Uzyskanie tytułu zawodowego magistra inżyniera w dyscyplinie Elektronika i Telekomunikacja
Data nadania stopnia: 9 lipiec 2002
Nazwa jednostki, która nadała stopień: Wydział Elektroniki, Politechnika Wrocławska
Tytuł pracy magisterskiej: Moduł pomiarowy do współpracy z czujnikami mostkowymi
Promotor: dr inż. Janusz Janiczek

3 INFORMACJE O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH / ARTYSTYCZNYCH

- maj 2010 – nadal: Adiunkt, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki. Politechnika Opolska
- październik 2002 – kwiecień 2010: Asystent, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki. Politechnika Opolska
grudzień 2002 – grudzień 2006: urlop w związku z odbywaniem studiów doktoranckich

4 WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA WYNIKAJĄCEGO Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI

4.1 TYTUŁ OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

Modelowanie układów dynamicznych całkowitego i niecałkowitego rzędu z zastosowaniem algorytmów redukcji systemów

Na przedmiotowe osiągnięcie habilitacyjne składa się jednotematyczny cykl publikacji przedstawionych poniżej:

- [MR1] (50%) Rydel M., Stanisławski R.: *A new frequency weighted Fourier-based method for model order reduction*, *Automatica*, vol. 88, 2018, pp. 107–112.
(IF = 6.126, CiteScore = 7.45, MNiSW = 45 pkt)
- [MR2] (40%) Stanisławski R., Rydel M., Latawiec K.J.: *Modeling of discrete-time fractional-order state space systems using the balanced truncation method*, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 354/7, 2017, pp. 3008–3020.
(IF = 3.139, CiteScore = 3.43, MNiSW = 35 pkt)
- [MR3] (100%) Rydel M.: *New integer-order approximations of discrete-time non-commensurate fractional-order systems using the cross Gramian*, *Advances in Computational Mathematics*, doi: 10.1007/s10444-018-9633-5.
(IF = 1.439, CiteScore = 1.38, MNiSW = 35 pkt)
- [MR4] (60%) Rydel M., Stanisławski R., Latawiec K.J.: *Balanced truncation model order reduction in limited frequency and time intervals for discrete-time commensurate fractional-order systems*, *Symmetry*, vol. 11/2, 2019, Article ID: 258.
(IF = 1.256, CiteScore = 1.33, MNiSW = 30 pkt)
- [MR5] (70%) Rydel M., Stanisławski R.: *Computation of controllability and observability Gramians in modeling of discrete-time noncommensurate fractional-order systems*, *Asian Journal of Control*, doi: 10.1002/asjc.2060.
(IF = 1.528, CiteScore = 1.76, MNiSW = 25 pkt)
- [MR6] (50%) Rydel M., Stanisławski W.: *Selection of reduction parameters for complex plant MIMO LTI models using the evolutionary algorithm*, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 140, 2017, pp. 94–106.
(IF = 1.218, CiteScore = 1.43, MNiSW = 25 pkt)
- [MR7] (50%) Rydel M., Stanisławski R., Latawiec K.J., Gałek M.: *Model order reduction of commensurate linear discrete-time fractional-order systems*, *IFAC PapersOnLine*, vol. 51/1, 2018, pp. 536–541.
(indeksowane w WoS, CiteScore = 0.68, MNiSW = 15 pkt)

Wskaźnik IF oznacza *Impact Factor* według bazy JCR ogłoszony w roku opublikowania pracy. W przypadku prac [MR3 – MR5] podano aktualnie dostępny wskaźnik IF₂₀₁₇ ogłoszony w roku 2018. Wskaźnik CiteScore oznacza *Impact Factor* według bazy Scopus. W nawiasach podano procentowy wkład habilitanta w przygotowanie publikacji. Szczegółowy opis wkładu habilitanta w poszczególne prace zamieszczony jest w Załączniku 3. Oświadczenia współautorów zamieszczone są w Załączniku 5.

5 OPIS CELU NAUKOWEGO I SIĄGNIĘTYCH WYNIKÓW

5.1 WPROWADZENIE

Zagadnienia modelowania, analizy i sterowania z zastosowaniem rachunku niecałkowitego/ułamkowego rzędu (ang. fractional-order calculus) są obecnie dziedziną wzbudzającą duże zainteresowanie naukowe, zarówno w ujęciu teoretycznym, jak również praktycznym. Pierwszy obszar obejmuje m.in. takie zagadnienia jak badanie stabilności, sterowalności, obserwowalności oraz projektowanie algorytmów sterowania dla układów opisanych za pomocą równań różniczkowych i różnicowych niecałkowitego/ułamkowego rzędu, nazywanych w skrócie układami niecałkowitego/ułamkowego rzędu [7, 15, 22–24, 38, 40, 44, 50] [MR9, MR16, MR20]. W drugim ujęciu badania dowodzą, że układy ułamkowego rzędu mogą być bardziej dokładne w modelowaniu oraz identyfikacji wybranych zjawisk w różnych obszarach nauki tj. procesy lepkosprężyste [2, 32, 41], procesy elektrochemiczne [5, 11, 33, 41] [MR13], procesy cieplne i układy transportu ciepła [12, 31, 37, 48], systemy mechaniczne [45] oraz biologiczne [5, 20, 30]. Ponadto układy regulacji oparte na rachunku niecałkowitego rzędu mogą cechować się większą dokładnością i odpornością w układach z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego [34, 35, 41, 42] [MR21].

Podstawowym problemem występującym w systemach niecałkowitego rzędu jest nieskończona złożoność obliczeniowa występujących w tych systemach pochodnych/różnic niecałkowitego rzędu, co prowadzi do niemożliwości praktycznej implementacji takich układów. Dlatego praktyczną realizację systemów ułamkowych osiąga się zwykle poprzez a) zastosowanie aproksymacji pochodnych/różnic niecałkowitego rzędu w postaci modeli całkowitego rzędu [6, 9, 26, 38] [MR16] albo b) wykorzystanie całkowitorzędowych aproksymacji całego systemu ułamkowego wraz z zawartymi pochodnymi. W drugim przypadku istnieje wiele metod modelowania takich systemów m. in. poprzez zastosowanie narzędzi identyfikacji [12, 43], użycie modeli o skończonej i nieskończonej odpowiedzi impulsowej (ang. FIR i IIR models) itp. W każdym przypadku, jako wynik końcowy otrzymuje się model całkowitego rzędu o skończonej i arbitralnie zadanej złożoności [7, 25, 51, 53] [MR2, MR3, MR5, MR14, MR19].

Należy zaznaczyć, że dokładność modelowania układów niecałkowitego rzędu poprzez aproksymatory całkowitorzędowe jest zależna zarówno od rodzaju modelu, jak również od jego złożoności. Jednak, niezależnie od stosowanej metody, otrzymanie modelu precyzyjnie opisującego właściwości systemu niecałkowitego rzędu w szerokim zakresie częstotliwości może prowadzić (i zazwyczaj prowadzi) do dużych wymiarów tego modelu. To z kolei nie jest korzystne w kontekście złożoności obliczeniowej, szczególnie przy konieczności implementacji modelu w czasie rzeczywistym dla wysokiej częstotliwości próbkowania. W/w problem jest podejmowany w pracach [MR2] oraz [MR5], w których narzędzia redukcji rzędu modeli (ang. model order reduction - MOR) oparte na zrównoważonej postaci systemu są stosowane w celu osiągnięcia modelu całkowitego i relatywnie niskiego rzędu.

Złożoność obliczeniowa procesu wyznaczenia zrównoważonej postaci systemu jest stosunkowo wysoka, głównie ze względu na konieczność obliczenia gramianów sterowalności oraz obserwowalności (lub cross gramianu) poprzez złożony numerycznie algorytm rozwią-

zywania równań Lapunowa (lub Sylwestra). W odniesieniu do powyższego, prace [MR2] oraz [MR3] wnoszą istotne zmniejszenie złożoności obliczeniowej algorytmu redukcji w wyniku opracowania *analitycznych* rozwiązań faktoryzacji graminaów sterowalności, obserwowalności oraz cross gramianu. Osiągnięte to zostaje poprzez oparcie się na specyficznej budowie modelu opracowanego na podstawie odpowiedzi impulsowej systemu niecałkowitego rzędu (FIR-based model). Zaproponowane *analityczne* metody są stosunkowo proste obliczeniowo i przez to istotnie skracają czas wyznaczania aproksymatorów całkowitego i relatywnie niskiego rzędu.

Inne podejście wykorzystania metod redukcji do wyznaczenia aproksymatorów systemów niecałkowitego rzędu przedstawiono w pracy [MR19]. Wykazano w niej, że dyskretne systemy niecałkowitego rzędu mogą być efektywnie aproksymowane za pomocą modeli całkowitego rzędu, wyznaczanych w wyniku redukcji modelu opartego na tzw. rozszerzonym równaniu stanu (ang. expanded state space equation - ESS). W pracy [MR5], zaproponowano natomiast alternatywną metodę wyznaczania gramianów sterowalności i obserwowalności dla modeli w postaci ESS. Bazując na tym specyficznym formacie modelu przedstawiono możliwość ich wyznaczenia na podstawie znacznie uproszczonego macierzewego zestawu równań liniowych, zamiast rozwiązywania kosztowych obliczeniowo równań Lapunowa. Umożliwia to znaczne zwiększenie efektywności obliczeniowej algorytmu redukcji w procesie wyznaczania niskiego rzędu aproksymatorów całkowitorzędowych dla systemów niecałkowitego rzędu, zwłaszcza w przypadku układów wiele wejść, wiele wyjść (ang. multi-input multi-output - MIMO).

Należy zaznaczyć, że w pracach [MR2, MR3, MR5] algorytmy redukcji systemów były wykorzystywane jako efektywne narzędzia służące do aproksymacji systemów niecałkowitego rzędu za pomocą relatywnie prostych modeli całkowitego rzędu. Jednak, pojęcie redukcji systemów w ujęciu bardziej dosłownym powinno wiązać się z redukcją złożonych systemów niecałkowitego rzędu do uproszczonych modeli tej samej klasy, tj. modeli niecałkowitego rzędu. Takie zagadnienie nie było dotychczas przedmiotem systematycznych badań, z wyjątkiem kilku prac poświęconych systemom zdefiniowanym w czasie ciągłym [13, 21, 47, 52]. Pierwszymi pracami poświęconymi redukcji w tym ujęciu dla systemów dyskretnych są publikacje [MR4] oraz [MR7]. Głównym rezultatem osiągniętym w w/w pracach jest zaproponowanie szeregu definicji gramianów sterowalności i obserwowalności systemów niecałkowitego rzędu opisanych zarówno w dziedzinie częstotliwości jak i czasu (dyskretnego). Przedstawiane w nich rezultaty pozwalają na zastosowanie narzędzi redukcji opartych na zrównoważonej postaci systemu w celu otrzymania zredukowanego modelu niecałkowitego rzędu.

Podstawową cechą redukcji z zastosowaniem metody Balanced Truncation (BT) jest aproksymacja z zadaną dokładnością odpowiedzi częstotliwościowej systemu (w sensie normy \mathcal{H}_∞) w pełnym zakresie częstotliwości. Jednakże, modelowanie zjawisk fizycznych w wielu obszarach nauki tj. mechanika, elektrotechnika, biologia, itp. opiera się na projektowaniu modeli matematycznych adekwatnych dla zadanych zakresów częstotliwości. Z tego powodu, często celem procesu redukcji jest wyznaczenie takich modeli uproszczonych, które są szczególnie dokładne w określonym (z góry zadanym) przedziale częstotliwości $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ oraz/lub czasu $[t_{min}, t_{max}]$. Zwiększenie dokładności aproksymacji w założonych przedziałach może być wymuszone poprzez a) wyznaczenie gramianów dla zadanych

przedziałów czasu i/lub częstotliwości [3, 14, 27, 57] albo b) zastosowanie wagowych filtrów częstotliwościowych połączonych kaskadowo z zredukowanym modelem [8, 19, 29, 49, 54, 55, 57]. W zależności od sposobu wprowadzenia funkcji wagowych otrzymujemy metody redukcji: TLBT (ang. time-limited Balanced Truncation), FLBT (ang. frequency-limited Balanced Truncation) oraz FW (ang. Frequency Weighted). W odniesieniu to omawianego obszaru w pracy [MR3] zaproponowano nową metodę aproksymacji układu niecałkowitego rzędu za pomocą modelu całkowitorzędowego, która jest oparta na metodzie FW bazującej na cross gramianie i modelu FIR. Z drugiej strony, wcześniej wspomnianą pracą [MR4] skupiła się na opracowaniu nowych definicji gramianów wyznaczonych dla zadanego przedziału częstotliwości $[\Theta_1, \Theta_2]$ oraz czasu dyskretnego $[k_1, k_2]$ w celu otrzymania zredukowanego modelu niecałkowitego rzędu adekwatnego w zadanym przedziałach częstotliwości i/lub czasu.

W tle przedstawianych powyżej prac dotyczących systemów ułamkowego rzędu, prowadzone były również badania nad redukcją złożonych systemów całkowitego rzędu [MR1, MR6]. W pracy [MR1] po raz pierwszy zostało zaproponowane podejście do redukcji metodą FW, w którym wykorzystuje się aproksymację systemu złożonego w postaci modelu o skończonej odpowiedzi impulsowej. Opracowane *analityczne* rozwiązania faktoryzacji gramianów sterowalności i obserwowalności umożliwiło zaproponowanie efektywnego obliczeniowo algorytmu redukcji. Pomimo tego, że opracowana metoda skupia się na redukcji systemów całkowitego rzędu, w połączeniu z wynikami pracy [MR2] może łatwo zostać uogólniona dla systemów niecałkowitego rzędu [MR14]. Innego rodzaju istotnym problemem praktycznym w metodzie FW jest dobór wag częstotliwościowych, użytych w procesie redukcji. Parametry częstotliwościowych funkcji wagowych oraz przedziały częstotliwości i/lub czasu, dla których wyznaczone są gramiany, mają kluczowe znaczenie z punktu widzenia właściwości dynamicznych otrzymanych modeli zredukowanych. Jednakże, dobór tych parametrów jest niewypukłym problemem optymalizacyjnym. Dlatego w pracy [MR6], do adaptacji parametrów metod redukcji zostały efektywnie zaimplementowane algorytmy ewolucyjne. Ponownie, w pracy [MR6] skupia się na redukcji złożonych układów całkowitego rzędu. Jednak biorąc pod uwagę, że omawiane zadanie optymalizacji jest niezależne od definicji systemu, przedstawione rezultaty mogą być bezpośrednio przeniesione również na systemy niecałkowitego rzędu.

5.2 ROZPATRYWANE MODELE NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

W pracach będących podstawą niniejszego wniosku rozważane są liniowe, niezmiennie w czasie (linear time-invariant - LTI), dyskretne modele nierównomiernego, niecałkowitego rzędu (ang. discrete-time non-commensurate fractional-order - DTNCF0)

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha x[k+1] &= A_f x[k] + Bu[k], \quad x_0 \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k] \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $k = 0, 1, \dots$ jest czasem dyskretnym, $x[k] \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem warunków początkowych, macierze $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_o \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n_o \times n_u}$ opisują właściwości dynamiczne systemu, n_u i n_o są odpowiednio liczbą wejść

oraz wyjść systemu oraz $\Delta^\alpha x[k+1]$ jest wektorem różnic niecałkowitego rzędu

$$\Delta^\alpha x[k+1] = \begin{bmatrix} \Delta^{\alpha_1} x_1[k+1] \\ \vdots \\ \Delta^{\alpha_n} x_n[k+1] \end{bmatrix},$$

gdzie $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, są rzędami różnic, przy czym $\alpha_i \in (0, 2)$. Poszczególne różnice niecałkowitego rzędu $\Delta^{\alpha_i} x_i[k+1]$, $i = 1, \dots, n$, mogą być opisane definicją Grünwalda-Letnikowa [34, ch. 3.5]

$$\Delta^{\alpha_i} x_i[k+1] = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha_i}{j} x_i(k-j+1) \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

gdzie $\binom{\alpha_i}{j}$ oznacza dwumian Newtona

$$\binom{\alpha_i}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha_i(\alpha_i-1)\dots(\alpha_i-j+1)}{j!} & j > 0 \end{cases}$$

W przypadku, gdy wszystkie wartości niecałkowitego rzędu są identyczne $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$, układ (1) jest nazywany dyskretnym, równomiernym systemem niecałkowitego rzędu (ang. discrete-time commensurate fractional-order - DTCFO).

Praktyczna realizacja różnicy niecałkowitego rzędu (2) w czasie $k+1$ wymaga zsumowania wszystkich elementów z zakresu od 0 do $k+1$. Skutkuje to wzrastającą z każdym krokiem symulacji złożonością obliczeniową równania (2). Ostatecznie dla $k \rightarrow \infty$, obliczenie równania (2) staje się niewykonalne. Z tego powodu, w praktycznych realizacjach konieczna jest aproksymacja różnicy (2), albo całego systemu (1) za pomocą aproksymatorów o skończonej długości implementacji [7, 25, 34, 51, 53] [MR2, MR3, MR5].

Uwaga 1. Przedstawiona powyżej definicja dyskretnych systemów niecałkowitego rzędu może zostać rozszerzona również na zdyskretyzowane systemy ciągłe. W przypadku zastosowania dyskretyzacji Eulera (the forward-shifted Euler discretization) [34, ch. 3.5] otrzymujemy

$$s^\alpha \approx \frac{1}{h^\alpha} z(1-z^{-1})^\alpha \quad (3)$$

gdzie s^α jest transformatą Laplace'a pochodnej niecałkowitego rzędu oraz h jest czasem próbkowania. Zdyskretyzowane modele systemów ciągłych w postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^\alpha} \Delta^\alpha x(t+h) &= \bar{A}_f x(t) + \bar{B}u(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie $t = kh$, mogą być opisane równaniem (1) z zastosowaniem następujących podstawień

$$A_f \rightarrow h^\alpha \bar{A}_f \quad B \rightarrow h^\alpha \bar{B} \quad (5)$$

5.3 REDUKCJA RZĘDU MODELU

Modelowanie systemów złożonych, jak również tworzenie aproksymatorów całkowniczych systemów niecałkowitego rzędu, może skutkować otrzymaniem modeli o wysokim rzędzie. Wysoka złożoność modelu matematycznego pociąga za sobą długie czasy symulacji komputerowej oraz znaczne zapotrzebowanie mocy obliczeniowej procesorów, co powoduje ich praktyczną nieprzydatność do symulacji oraz projektowania układów sterowania. W pracach [MR1, MR2, MR3, MR5] w/w modele zostały poddane procesowi redukcji rzędu w celu uzyskania aproksymatorów całkowniczego i relatywnie niskiego rzędu.

Istnieje znaczna liczba technik redukcji opartych na różnych założeniach matematycznych [1, 4, 46]. Pośród nich wyróżnić można metody bazujące na dekompozycji SVD (ang. Singular Value Decomposition), które są oparte na koncepcji zrównoważonej realizacji modelu (ang. Balanced Realization). Do podstawowych zalet tych metod redukcji można zaliczyć zagwarantowanie zachowania stabilności modelu zredukowanego oraz możliwość oszacowania *a priori* błędu aproksymacji [1, 28, 36]. Metody redukcji oparte na zrównoważeniu można przedstawić jako zastosowanie liniowego przekształcenia nieosobliwego $\bar{x} \rightarrow T\bar{x}$, które zrównoważy system pierwotny.

Rozważmy dyskretny, stabilny model LTI całkowniczego rzędu przedstawiony w przestrzeni stanu

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \quad x_0 \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k] \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $k = 0, 1, \dots$ jest czasem dyskretnym, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem warunków początkowych oraz macierze $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_o \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n_o \times n_u}$ opisują właściwości dynamiczne systemu. Załóżmy, że macierz T jest macierzą transformacji systemu, która przekształca gramiany sterowalności P , obserwowalności Q oraz cross gramian \mathcal{X} do postaci macierzy diagonalnych, na diagonalu których znajdują się wartości szczególne Hankela [1, 10, 28, 36]

$$TPT^T = T^{-T}QT^{-1} = T\mathcal{X}T^{-1} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_L) \quad (7)$$

gdzie σ_i są wartościami szczególnymi Hankela (HSV) takimi, że $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0$. Macierz transformacji T umożliwia wyznaczenie zrównoważonej postaci systemu w następujący sposób

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+1] &= TAT^{-1}\bar{x}[k] + TBu[k] = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \bar{x}[k] + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u[k] \\ \bar{y}[k] &= CT^{-1}\bar{x}[k] + Du[k] = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \bar{x}[k] + Du[k] \end{aligned}$$

oraz macierze $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\bar{B}_1 \in \mathbb{R}^{r \times n_u}$, $\bar{C}_1 \in \mathbb{R}^{n_o \times r}$.

Zrównoważona postać modelu umożliwia wyznaczenie modelu zredukowanego rzędu r (części dominującej systemu), który z założoną dokładnością opisuje jego dynamikę

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= A_r x_r(k) + B_r u(k) \\ y_r(k) &= C_r x_r(k) + D_r u(k) \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $A_r = \bar{A}_{11}$, $B_r = \bar{B}_1$, $C_r = \bar{C}_1$ oraz $D_r = D$. Górnym oszacowaniem normy błędu aproksymacji \mathcal{H}_∞ modelu zredukowanego jest podwojona suma wartości Hankela, które zostają odrzucone w wyniku redukcji modelu [1, 10, 28, 36].

Przekształcenie nieosobliwe $\bar{x} \rightarrow Tx$ nie jest jednoznaczne i istnieje kilka różnych algorytmów wyznaczania macierzy transformacji T [1, 10, 28, 36, 54]. Zrównoważenie modeli o dużej liczbie zmiennych stanu często może być operacją źle uwarunkowaną numerycznie, ze względu na szybki spadek wartości HSV. W wyniku tego macierz transformacji T często ma właściwości zbliżone do macierzy osobliwej, co powoduje duże błędy numeryczne podczas wyznaczania jej odwrotności. Dlatego też większość odpornych numerycznie algorytmów bazuje na jednoczesnym wyznaczeniu prostokątnej macierzy transformacji/obciążenia $T_r \in \mathbb{R}^{r \times n}$ oraz jej niejednoznacznej prawej pseudoinwersji $T_r^\# \in \mathbb{R}^{n \times r}$ takiej, że $T_r T_r^\# = I$. Zastosowanie tych macierzy umożliwia jednoczesne zrównoważenie oraz zredukowanie systemu (ang. Balanced Truncation - BT) w następujący sposób

$$A_r = T_r A T_r^\# \quad B_r = T_r B \quad C_r = C T_r^\# \quad (9)$$

Znaczna większość algorytmów wyznaczania macierzy transformacji/obciążenia wymaga wyznaczenia gramianów sterowalności i obserwowalności lub wyznaczeniu cross gramianu [3, 8, 10, 14, 18, 19, 27–29, 36, 39, 55, 57]. Dwa przykładowe algorytmy zostały przedstawione w Tabelach 1 oraz 2.

Tabela 1: Algorytm SR [1, ch. 7.3] [28]

<p>1) Wyznaczenie dekompozycji gramianów sterowalności S i obserwowalności R: $P = S^T S, \quad Q = R^T R$</p> <p>2) Dekompozycja SVD iloczynu macierzy: $SR^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ gdzie $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0$</p> <p>3) Wyznaczenie macierzy transformacji/obciążenia i jej prawej pseudoinwersji: $T_r = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} U_1^T R \quad T_r^\# = S^T V_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}$</p>

Tabela 2: Jednostronna projekcja Galerkin na podstawie cross gramianu [18] [MR3]

<p>1) Dekompozycja SVD cross gramianu: $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ gdzie $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0$</p> <p>2) Wyznaczenie macierzy transformacji/obciążenia i jej prawej pseudoinwersji: $T_r = U_1^T, \quad T_r^\# = U_1$</p>

5.4 REDUKCJA RZĘDU MODELI FIR [MR1, MR2, MR3]

5.4.1 APROKSYMACJA DYSKRETYCH MODELI CAŁKOWITEGO ORAZ NIECAŁKOWITEGO RZĘDU ZA POMOCĄ MODELI FIR

Transmitancję modelu $G(z)$ zarówno całkowitego, jak również niecałkowitego rzędu można opisać za pomocą rozwinięcia jego odpowiedzi impulsowej w szereg Laurenta [17, 56] [MR1, MR2]

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}, \quad (10)$$

gdzie $g_k \in \mathfrak{R}$, $k = 0, 1, \dots$ są elementami odpowiedzi impulsowej systemu, które są równe dyskretnoczasowym współczynnikom Fouriera. W praktyce, współczynniki g_k szybko maleją do zera i mogą być pominięte powyżej ustalonej długości implementacji L . W ten sposób otrzymujemy model o skończonej długości implementacji (model FIR) $\bar{G}(z)$ aproksymujący system pierwotny $G(z)$.

Dla dyskretnych systemów całkowitorzędowych współczynniki Fouriera mogą być wyznaczone z następującej zależności [17, 56] [MR1]

$$g_k = \begin{cases} D & k = 0 \\ CA^{k-1}B & k = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (11)$$

Sposób wyznaczania współczynników g_k dla systemów DTCFO został zaproponowany w pracy [MR2] oraz rozszerzony na systemy DTNCFD w pracy [MR3]

$$g_k = \begin{cases} D & k = 0 \\ C\phi_k & k = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (12)$$

gdzie

$$\phi_k = \begin{cases} B & k = 1 \\ (A_f + \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n))\phi_{k-1} - \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^j \text{diag} \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_n \\ j \end{pmatrix} \right] \phi_{k-j} & k = 2, \dots, L \end{cases}$$

oraz A_f , B , C , D i α_i jak w równaniu (1) oraz L będącym długością implementacji. Transmitancję modelu FIR o długości implementacji L , zarówno dla modeli o całkowitym, jak również niecałkowitym rzędzie można przestawić w przestrzeni stanu

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+1] &= \bar{A}\bar{x}[k] + \bar{B}u[k], \\ \bar{y}[k] &= \bar{C}\bar{x}[k] + \bar{D}u[k], \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie $\bar{A} \in \mathfrak{R}^{L \times L}$, $\bar{B} \in \mathfrak{R}^{L \times 1}$, $\bar{C} \in \mathfrak{R}^{1 \times L}$ oraz $\bar{D} \in \mathfrak{R}$ dla systemów o jednym wejściu i jednym wyjściu (ang. single-input single-output - SISO) są wyznaczone w następujący sposób

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_L], \quad \bar{D} = g_0.$$

przy czym współczynniki g_k są wyznaczane z równania (11) dla modeli całkowitego oraz z równania (12) dla modeli niecałkowitego rzędu.

Uwaga 2. Dla systemów MIMO, dyskretne współczynniki Fouriera stają się macierzami $g_k \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$. W modelu (13) każdy element (skalar) 0 oraz 1 macierzy A oraz wektora \bar{B} jest zastąpiony przed odpowiednią macierz zerową $0 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ oraz jednostkową $I \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$. W wyniku tego rząd aproksymatora FIR dla systemu MIMO zależy od liczby wejść modelu oraz długości implementacji $\bar{L} = Ln_u$ [56] [MR2].

5.4.2 REDUKCJA METODĄ BALANCED TRUNCATION MODELI FIR

Obliczenie gramianów systemu jest na najbardziej złożonym obliczeniowo krokiem algorytmu BT. Z tego względu, w pracach [MR2] i [MR3] sformułowano analityczne rozwiązania faktoryzacji Choleskiego gramianów sterowalności, obserwowalności, jak również cross gramian modelu FIR.

Twierdzenie 1 (Theorem 1 w [MR2]). Rozważmy dyskretny model niecałkowitego rzędu (1) aproksymowany przez model FIR (13). Wówczas dekompozycje Choleskiego gramianu sterowalności $S \in \mathbb{R}^{L \times L}$ oraz obserwowalności $R \in \mathbb{R}^{L \times L}$ takiego modelu można wyznaczyć w sposób analityczny z następujących równań

$$S = I_{L \times L}, \quad R = \begin{bmatrix} g_L & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{L-1} & g_L & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \dots & g_L \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdzie współczynniki g_k , $k = 1, \dots, L$ są obliczane jak w równaniu (12).

Twierdzenie 2 (Lemma 1 w [MR3]). Rozważmy model FIR (13) aproksymujący stabilny dyskretny model nierównomiernego, niecałkowitego rzędu LTI SISO (1). Wówczas cross gramian takiego modelu jest macierzą trójkątną górną Hankela

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_{L-1} & g_L \\ g_2 & g_3 & \dots & g_L & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{L-1} & g_L & \dots & 0 & 0 \\ g_L & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

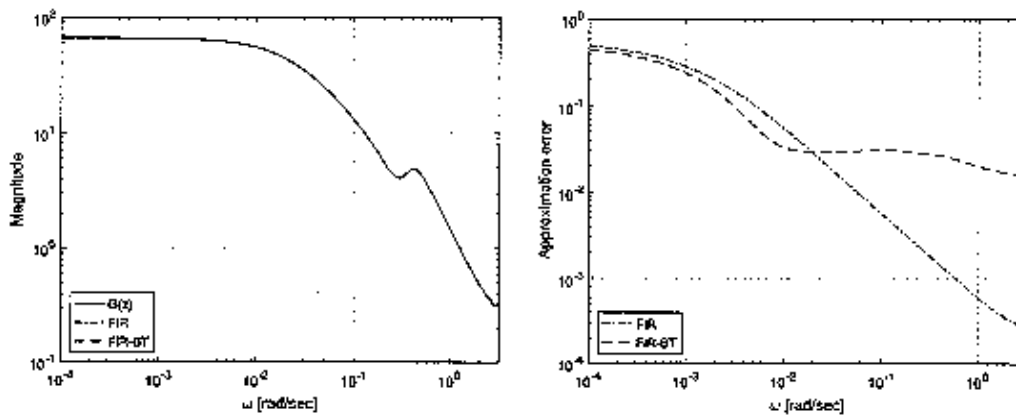
gdzie współczynniki g_k , $k = 1, \dots, L$ są obliczane jak w równaniu (12).

Aproksymacja systemu niecałkowitego rzędu za pomocą modelu FIR wraz z wyznaczeniem faktoryzacji gramianów S i R jak w Twierdzeniu 1 lub cross gramianu jak w Twierdzeniu 2 w algorytmie redukcji BT, skutkuje zastosowaniem metody FMR-BT [MR2, MR3].

Przykład 1 ([MR2]). Rozważmy dyskretny model niecałkowitego rzędu (1) dla $\alpha = 0.9$ przedstawiony w przestrzeni stanu w postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2.37 & -4.3849 & 2.602023 & -0.5886251 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1.8 & 0.9 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Charakterystyki częstotliwościowe modułu transmitancji systemu niecałkowitego rzędu (1), modelu FIR (13), jak również modelu zredukowanego rzędu $r = 6$ otrzymanego w wyniku redukcji metodą FMR-BT są przedstawione na rys. 1. Uzyskane wyniki potwierdzają, że metoda redukcji FMR-BT umożliwia uzyskanie bardzo dobrej jakości aproksymacji [MR2]. Jak można zaobserwować na rys. 1, charakterystyki częstotliwościowe modeli zredukowanych są trudne do rozróżnienia od charakterystyk systemu pierwotnego.



Rys. 1: Charakterystyki częstotliwościowe modułu transmitancji modeli oraz błędy aproksymacji.

Skrypty programu Matlab umożliwiające wyznaczenie wyników przedstawionych w pracy [MR2] mogą być pobrane ze strony: <http://doi.org/10.5281/zenodo.1256666>.

5.4.3 REDUKCJA METODĄ FREQUENCY WEIGHTED MODELI FIR APROKSYMUJĄCYCH ZŁOŻONE SYSTEMY CAŁKOWITEGO RZĘDU

Metoda Frequency Weighted (FW) jest uogólnieniem metody BT, polegającym na bezpośrednim wprowadzeniu na wejścia i/lub wyjścia modelu częstotliwościowych funkcji wagowych. Wprowadzenie funkcji wagowych umożliwia zmniejszenie błędów aproksymacji w zadanych zakresach częstotliwości. W pracy [MR1] metoda FW została zastosowana do redukcji modeli FIR aproksymujących właściwości dynamiczne złożonych systemów całkowitego rzędu, w wyniku czego opracowano nową metodę redukcji FMR-FW. Takie podejście umożliwiło opracowanie *analitycznych* rozwiązań do wyznaczenia faktoryzacji gramianów sterowalności oraz obserwowalności modelu z wprowadzonymi wagami częstotliwościowymi.

Rozważmy wejściową oraz wyjściową funkcję wagową opisaną w postaci FIR

$$W_i(z) = \sum_{k=0}^{m_i} w_k^i z^{-k}, \quad W_o(z) = \sum_{k=0}^{m_o} w_k^o z^{-k} \quad (16)$$

gdzie m_i and m_o oznaczają liczbę dyskretnoczasowych współczynników Fouriera dla wejściowej oraz wyjściowej funkcji wagowej. Dla uproszczenia, ale bez straty ogólności rozwiązania można założyć, że funkcje wagowe $W_i(z)$ oraz $W_o(z)$ są modelami kwadratowymi, odpowiednio o wymiarach $n_u \times n_u$ oraz $n_y \times n_y$. Rząd modelu funkcji wagowej wejściowej $W_i(z)$ wynosi $n_i = m_i n_u$, a każdy dyskretnoczasowy współczynnik Fouriera jest macierzą $w_k^i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $k = 0, \dots, m_i$. Odpowiednio każdy współczynnik w_k^o filtru wagowego wyjściowego $W_o(z)$ jest macierzą $w_k^o \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $k = 0, \dots, m_o$, co skutkuje rzędem modelu $n_o = m_o n_y$.

Metoda redukcji FW została opracowana dla asymptotycznie stabilnych modeli wraz z asymptotycznie stabilnymi funkcjami wagowymi: wejściową ($W_i = \{A_i, B_i, C_i, D_i\}$) oraz wyjściową ($W_o = \{A_o, B_o, C_o, D_o\}$). Przy założeniu, że połączenie systemu z funkcjami wagowymi nie powoduje zredukowania się par biegun-zero w otrzymanych modelach, $\tilde{G}W_i$ oraz $W_o\tilde{G}$ można przedstawić następująco [8, 19, 54, 55, 57]

$$\tilde{G}W_i = \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{A} & \bar{B}C_i & \bar{B}D_i & \\ 0 & A_i & B_i & \\ \hline \bar{C} & \bar{D}C_i & \bar{D}D_i & \end{array} \right], \quad W_o\tilde{G} = \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{A} & 0 & \bar{B} & \\ B_o\bar{C} & A_o & B_o\bar{D} & \\ \hline D_o\bar{C} & C_o & D_o\bar{D} & \end{array} \right] \quad (17)$$

Należy zaznaczyć, że gramian sterowalności może być wyznaczony na podstawie systemu z uwzględnieniem wagi wejściowej $\tilde{G}W_i$, natomiast gramian obserwowalności na podstawie systemu z uwzględnieniem wagi wyjściowej $W_o\tilde{G}$.

Twierdzenie 3 (Theorem 1 w [MR1]). *Rozważmy model FIR (13) dla którego współczynniki g_k wyznaczane są z zależności (11), który jest kaskadowo połączony w wejściową i wyjściową funkcją wagową. Niech \tilde{P} oraz \tilde{Q} będą gramianami sterowalności i obserwowalności takiego systemu, wówczas*

1) *faktoryzację gramianu sterowalności $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{(L+m_i)n_u \times (L+m_i)n_u}$, taką że $\tilde{P} = \tilde{S}^T \tilde{S}$ można wyznaczyć następująco*

$$\tilde{S} = \left[\begin{array}{cccccccc} w_0^i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ w_1^i & w_0^i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m_i-1}^i & w_{m_i-2}^i & w_{m_i-3}^i & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ w_{m_i}^i & w_{m_i-1}^i & w_{m_i-2}^i & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{m_i}^i & w_{m_i-1}^i & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_0^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_1^i & w_0^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_{m_i}^i & w_{m_i-1}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_{m_i}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \quad (18)$$

gdzie $I \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ oraz $0 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ są odpowiednio macierzami jednostkowymi oraz zerowymi

2) faktoryzację gramianu obserwowalności $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{(L+m_o)n_y \times (Ln_u+m_on_u)}$, taką że $\tilde{Q} = \tilde{R}^T \tilde{R}$ można wyznaczyć następująco

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} r_L & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{L-1} & r_L & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ r_1 & r_2 & \dots & r_L & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{m_o-1,1} & r_{m_o-1,2} & \dots & r_{m_o-1,L} & w_{m_o}^o & 0 & \dots & 0 \\ r_{m_o-2,1} & r_{m_o-2,2} & \dots & r_{m_o-2,L} & w_{m_o-1}^o & w_{m_o}^o & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{0,1} & r_{0,2} & \dots & r_{0,L} & w_1^o & w_2^o & \dots & w_{m_o}^o \end{bmatrix} \quad (19)$$

gdzie

$$r_l = \sum_{k=l}^{l+m_o} w_{m_o+l-k}^o g_k \quad r_{j,l} = \sum_{k=0}^j w_{j-k}^o g_{l+k} \quad (20)$$

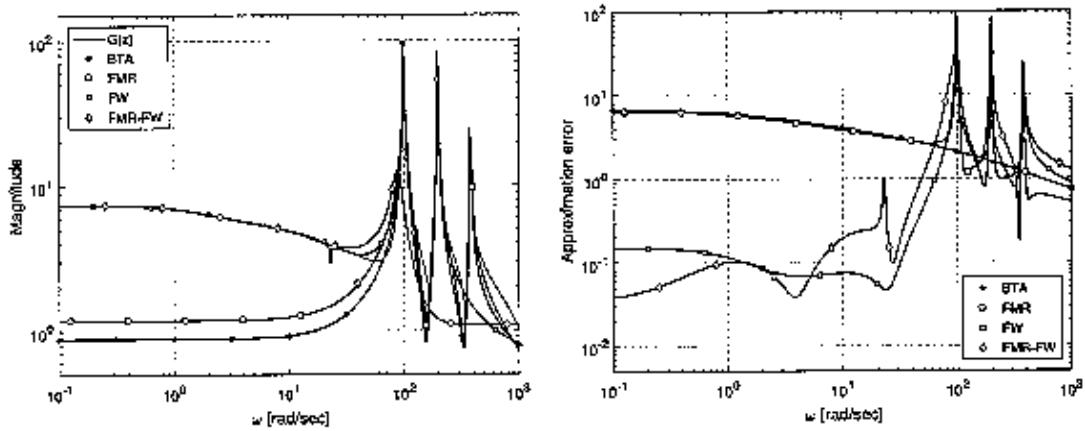
dla $l = 1, \dots, L$, $j = 0, \dots, m_o - 1$ i $g_k = 0 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ dla $k > L$ oraz w_k^o , w_k^o są współczynnikami Fouriera odpowiednio dla wejściowej i wyjściowej funkcji wagowej (16).

Należy podkreślić, że wprowadzenie funkcji wagowych wpływa na rząd gramianów sterowalności \tilde{P} oraz obserwowalności \tilde{Q} ze względu na uwzględnienie dynamiki wprowadzonych funkcji wagowych. Zatem na ich podstawie nie jest możliwe bezpośrednie wyznaczenie macierzy transmitancji/obciążenia T_r oraz $T_r^\#$, gdyż ich wymiar byłby większy od rzędu modelu FIR (13). Z tego względu zaproponowano szereg algorytmów przekształcających otrzymane macierze w gramiany FW sterowalności i obserwowalności (ang. frequency weighted controllability and observability Gramians) [8, 19, 29, 54, 57]. Wszystkie kolejne kroki algorytmu redukcji FW są identyczne jak dla metody BT. Zastosowanie aproksymacji za pomocą modelu FIR wraz z wyznaczeniem faktoryzacji gramianów za pomocą Twierdzenia 3 w algorytmie redukcji BT, skutkuje użyciem metody FMR-FW [MR1].

Uwaga 3. Twierdzenie 3 opracowane dla złożonych modeli całkowitego rzędu może być w prosty sposób rozszerzone także na systemy niecałkowitego rzędu poprzez użycie procedury obliczeniowej (12) do wyznaczania współczynników g_k modelu FIR aproksymującego system (1) [MR14].

Przykład 2 ([MR1]). Efektywność metody redukcji FMR-FW jest przedstawiona na przykładzie testowego systemu dynamicznego wprowadzonego w pracy [39]. Oryginalny system SISO rzędu 1006 poddany został dyskretyzacji z wykorzystaniem metody Tustina z krokiem 0,002 [s]. Wyniki redukcji metodą FMR-FW zostały porównane z modelami zredukowanymi otrzymanymi przez zastosowanie metod BT [28, 36], FMR [56] oraz klasycznej metody FW [8]. Wejściowa funkcja wagowa przyjmuje postać filtru dolno-przepustowego FIR o częstotliwości granicznej $\omega_{max} = 20$ [rad/s] oraz rzędzie $m_i = 100$.

Długość implementacji modelu FIR została ustalona na $L = 190$, natomiast rzędy modeli zredukowanych wynoszą $r = 6$. Charakterystyki modułu transmitancji oraz błędy aproksymacji otrzymanych modeli zredukowanych przedstawione zostały na rys. 2.



Rys. 2: Charakterystyki częstotliwościowe modułu transmitancji modeli oraz błędy aproksymacji.

Charakterystyki dowodzą, że zastosowanie metod FW oraz FMR-FW umożliwia uzyskanie bardzo podobnych wyników redukcji. Jak można również zauważyć, zastosowanie wprowadzonego filtra dolnoprzepustowego umożliwia znaczne zmniejszenie błędów aproksymacji modeli w zakresie niskich częstotliwości $\omega \in [0.1, 25]$, jak również dla stanu ustalonego.

Skrypty programu Matlab umożliwiające wyznaczenie wyników przedstawionych w pracy [MR1] mogą być pobrane ze strony: <http://doi.org/10.5281/zenodo.1256651>.

5.4.4 REDUKCJA METODĄ CROSS GRAMIAN FREQUENCY WEIGHTED MODELI FIR APROKSYMUJĄCYCH SYSTEMY NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

Jak zostało to już wspomniane w rozdziale 5.4.2 w procesie redukcji modeli może również zostać użyty cross gramian \mathcal{X} [10, 18]. W pracy [MR3] sformułowano nową metodę aproksymacji systemów SISO nierównomiernego, niecałkowitego rzędu (1) opartą na szczególnej wersji metody FW zaimplementowanej do redukcji modeli FIR.

Twierdzenie 4 (Theorem 1 w [MR3]). *Rozważmy system (17) w skład którego wchodzi model FIR (13) aproksymujący właściwości dyskretnego modelu SISO nierównomiernego, niecałkowitego rzędu (1) oraz wejściowej funkcji wagowej (16). Wówczas cross gramian jest następującą macierzą blokową*

$$\tilde{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} \\ \mathcal{X}_{21} & \mathcal{X}_{22} \end{bmatrix} \quad (21)$$

gdzie

1) macierz $\mathcal{X}_{11} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ jest macierzą trójkątną górną Hankela

$$\mathcal{X}_{11} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{L-1} & r_L \\ r_2 & r_3 & \cdots & r_L & 0 \\ r_3 & r_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_L & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

oraz

$$r_i = \sum_{k=i}^{i+m_i} w_{(k-i)}^i g_k \quad \text{dla } i = 1, \dots, L$$

2) macierz $\mathcal{X}_{12} \in \mathbb{R}^{L \times m_i}$ ma następującą postać

$$\mathcal{X}_{12} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 & \hat{r}_2 & \cdots & \hat{r}_{m_i} \\ \hat{r}_{2,1} & \hat{r}_{2,2} & \cdots & \hat{r}_{2,m_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{r}_{L,1} & \hat{r}_{L,2} & \cdots & \hat{r}_{L,m_i} \end{bmatrix} \quad (23)$$

oraz

$$\hat{r}_i = \sum_{j=0}^{m_i} w_j^i \sum_{k=0}^j g_k w_{(i+j-k)}^i \quad \text{dla } i = 1, \dots, L$$

$$\hat{r}_{i,j} = \hat{r}_{(i+j-1)} + \sum_{k=1}^{m_i} r_{(i-k)} w_{(j+k-1)}^i \quad \text{dla } i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, m_i$$

3) macierz $\mathcal{X}_{21} \in \mathbb{R}^{m_i \times L}$ jest prostokątną macierzą Hankela

$$\mathcal{X}_{21} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{L-1} & g_L \\ g_2 & g_3 & \cdots & g_L & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m_i} & g_{m_i+1} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

4) macierz $\mathcal{X}_{22} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ ma następującą postać

$$\mathcal{X}_{22} = \begin{bmatrix} \check{r}_{1,1} & \check{r}_{1,2} & \cdots & \check{r}_{1,m_i} \\ \check{r}_{2,1} & \check{r}_{2,2} & \cdots & \check{r}_{2,m_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \check{r}_{m_i,1} & \check{r}_{m_i,2} & \cdots & \check{r}_{m_i,m_i} \end{bmatrix} \quad (25)$$

oraz

$$\check{r}_{i,j} = \sum_{k=1}^i g_{(k-1)} w_{(j+i-k)}^i \quad \text{dla } i = 1, \dots, m_i, j = 1, \dots, m_i$$

Dla wszystkich macierzy przedstawionych powyżej $g_k = 0$ dla $k > L$, $w_k^i = 0$ dla $k > m_i$, $\hat{r}_k = 0$ dla $k < 1$ lub $k > L$.

Jak to zostało już wcześniej wspomniane dla gramianów sterowalności i obserwowalności, zastosowanie funkcji wagowych również wpływa na rząd cross gramianu. W celu wyznaczenia macierzy transformacji/obciążenia T_r and $T_r^\#$, na podstawie algorytmu przedstawionego w Tabeli 2, cross gramian systemu z dołączonymi funkcjami wagowymi GW_i musi zostać podzielony w następujący sposób

$$\bar{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} \\ \mathcal{X}_{21} & \mathcal{X}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(L+m_{in}) \times (L+m_{in})}, \text{ gdzie } \mathcal{X}_{11} \in \mathbb{R}^{L \times L} \quad (26)$$

W ten sam sposób, jak w przypadku gramianów FW sterowalności oraz obserwowalności, FW cross gramian $\bar{\mathcal{X}}$ może być wyznaczony z następującej zależności

$$\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_{11} - \gamma \mathcal{X}_{12} \mathcal{X}_{22}^{-1} \mathcal{X}_{21}, \quad (27)$$

Dla $\gamma = 0$ uzyskujemy rozwiązanie zaproponowane przez Ennsa [8], dla $\gamma = 1$ rozwiązanie przedstawione przez Lin&Chiu [29]. W przypadku, gdy $0 < \gamma < 1$ otrzymujemy generalizację obu wcześniejszych podejść [54].

Przykład 3 ([MR3]). Rozważmy dyskretny system nierównomiernego, niecałkowitego rzędu (1) przedstawiony w przestrzeni stanu w postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} -2.2 & -1.5 & -0.45 & -0.05 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \Delta^\alpha = \begin{bmatrix} \Delta^{0.8} \\ \Delta^{0.4} \\ \Delta^{0.5} \\ \Delta^{0.25} \end{bmatrix}.$$

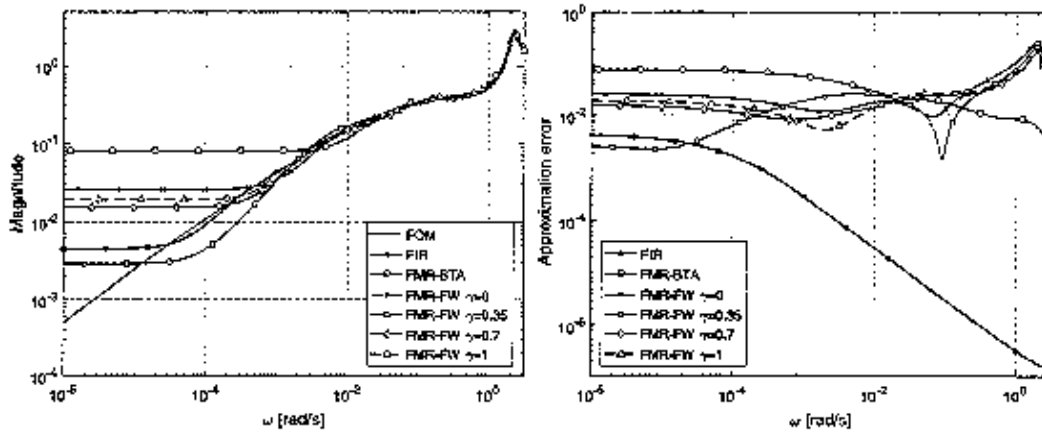
aprosymowany za pomocą modelu FIR (13) o długości implementacji $L = 10^4$.

Powyższy system został poddany redukcji do rzędu $r = 4$ za pomocą metod FMR-BT oraz FMR-FW z zastosowaniem cross gramianu (27) dla $\gamma = 0, 0.35, 0.7, 1.0$ oraz algorytmu wyznaczania macierzy transformacji/obciążenia przedstawionego w Tabeli 2. Jako wejściową funkcję wagową zastosowano filtr dolnoprzepustowy FIR o częstotliwości granicznej $\omega_c = 0.01\pi$ [rad/s] oraz rzędzie $m_4 = 12$. Charakterystyki modułu transmitancji systemu, aproksymatora FIR oraz modeli zredukowanych, jak również błędy aproksymacji zostały przedstawione na rys. 3.

Przedstawione wyniki redukcji wskazują, że metoda FMR-FW umożliwia uzyskanie dobrych wyników aproksymacji, szczególnie dla niskich częstotliwości w porównaniu do metody FMR-BT. Jest to spowodowane zastosowaniem filtrów dolnoprzepustowych jako funkcji wagowych. Jak można zauważyć dokładność aproksymacji dla niskich częstotliwości jest w dużej mierze ograniczona dokładnością modelu FIR aproksymującego model niecałkowitego rzędu.

Skrypty programu Matlab umożliwiające wyznaczenie wyników przedstawionych w pracy [MR3] mogą być pobrane ze strony: <http://doi.org/10.5281/zenodo.1256698>.

Uwaga 4. Przedstawione w rozdziałach 5.4.3 oraz 5.4.4 twierdzenia umożliwiają wyznaczenie gramianów modelu FIR i mogą być wykorzystane przy redukcji modeli, zarówno



Rys. 3: Charakterystyki częstotliwościowe modułu transmitancji modeli oraz błędy aproksymacji.

całkowitego jak również niecałkowitego rzędu. Jako, że zarówno faktoryzacje graminałów sterowalności, obserwowalności jak również cross gramian mogą być wyznaczone z prostych zależności analitycznych (w przeciwieństwie do rozwiązywania równań Lapunowa/Sylwestra), wprowadzone rozwiązania są znacznie bardziej efektywne obliczeniowo. Złożoność obliczeniowa zaproponowanych algorytmów redukcji jest klasy $\mathcal{O}(n^2)$ w porównaniu do $\mathcal{O}(n^3)$ dla klasycznych metod BT oraz FW. Wprowadzona metoda FMR-FW jest szczególnie użyteczna w przypadku redukcji modeli SISO. Szczegóły opisujące poszczególne wersje metod redukcji są opisane w pracach [MR1 – MR3].

5.5 APROKSYMATOR ESS DYSKRETNEGO MODELU NIECAŁKOWITEGO RZĘDU [MR5]

W praktycznych implementacjach różnica niecałkowitego rzędu jest aproksymowana poprzez zastosowanie różnicy o skończonej długości implementacji (ang. finite-length fractional-order difference - FFD)

$$\Delta^\alpha x(k+1) \approx \sum_{j=0}^L (-1)^j \text{diag} \left[\binom{\alpha_1}{j}, \dots, \binom{\alpha_n}{j} \right] x(k-j+1) \quad (28)$$

gdzie $k = 0, 1, \dots$, $x(l) = 0 \forall l < 0$ oraz L oznacza długość implementacji. Należy podkreślić, że dokładna aproksymacja różnicy niecałkowitego rzędu wymaga bardzo dużych wartości L , szczególnie w przypadku niskich wartości α_i .

W wyniku zastosowania aproksymacji różnicy niecałkowitego rzędu za pomocą modelu o skończonej długości implementacji (28), możliwe jest opisanie aproksymatora systemu niecałkowitego rzędu (1) w postaci modelu całkowitego rzędu opartego na tzw. rozszerzonym równaniu stanu (ang. expanded state space equation - ESS) [7]

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie macierze modelu $\hat{A} \in \mathbb{R}^{Ln \times Ln}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{Ln \times n}$, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{n \times Ln}$, $\hat{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ można opisać następująco

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{L-1} & \beta_L & B \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & \cdots & 0 & 0 & D \end{array} \right]$$

przy czym $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oznaczają odpowiednio macierz jednostkową i zerową oraz

$$\beta_j = \begin{cases} A_j - I + \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) & j = 1 \\ (-1)^{(j+1)} \text{diag}\left(\binom{\alpha_1}{j}, \dots, \binom{\alpha_n}{j}\right) & j = 2, \dots, n \end{cases} \quad (30)$$

Uwaga 5. Model ESS aproksymujący właściwości dynamiczne systemu niecałkowitego rzędu nie gwarantuje zachowania stabilności uzyskanego aproksymatora [7]. Z tego powodu konieczne jest sprawdzenie jego stabilności zanim zostanie poddany operacji redukcji. Jak już było wcześniej wspomniane, dokładna aproksymacja modelu niecałkowitego rzędu w szerokim zakresie częstotliwości wymaga wysokiej wartości L . Z tego względu otrzymane modele ESS mogą być bardzo wysokiego rzędu. Rząd modelu zależy zarówno od długości implementacji FFD (28), jak również od rzędu systemu (1) $\hat{L} = Ln$.

5.5.1 REDUKCJA METODĄ BALANCED TRUNCATION APROKSYMATORÓW ESS

Jak już to było wielokrotnie podkreślone, wyznaczenie gramianów sterowalności i obserwowalności jest najbardziej wymagającym obliczeniowo elementem redukcji. Z tego względu w pracy [MR5] zaproponowano nowy algorytm dla obliczenia gramianów sterowalności oraz obserwowalności modelu ESS modelu wykorzystując jego specyficzne właściwości. Umożliwia to znaczne zwiększenie efektywności obliczeniowej klasycznej metody BT w procesie wyznaczania całkowitego i relatywnie niskiego rzędu aproksymatorów systemów niecałkowitego rzędu.

Twierdzenie 5 (Lemma 1 w [MR5]). *Rozważmy stabilny dyskretny system nierównomiernego, niecałkowitego rzędu (1) z aproksymacją różnicy FFD (28). Wówczas gramian sterowalności takiego modelu jest rzeczywistą symetryczną macierzą blokową Toeplitza*

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2^T & p_3^T & \cdots & p_L^T \\ p_2 & p_1 & p_2^T & \cdots & p_{L-1}^T \\ p_3 & p_2 & p_1 & \cdots & p_{L-2}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_L & p_{L-1} & p_{L-2} & \cdots & p_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

gdzie $p_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dla $j = 1, \dots, L$.

Twierdzenie 6 (Lemma 2 w [MR5]). *Rozważmy stabilny dyskretny model nierównomiernego, niecałkowitego rzędu (1) z aproksymacją różnicy FFD (28). Wówczas gramian obserwowalności takiego modelu jest rzeczywistą macierzą symetryczną*

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2^T & q_3^T & \cdots & q_L^T \\ q_2 & q_{22} & q_{32}^T & \cdots & q_{L2}^T \\ q_3 & q_{32} & q_{33} & \cdots & q_{L3}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_L & q_{L2} & q_{L3} & \cdots & q_{LL} \end{bmatrix} \quad (32)$$

gdzie $q_j, q_{ji} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dla $j = 1, \dots, L, i = 1, \dots, L$. Ponadto każda z macierzy q_{ji} może zostać obliczona na podstawie elementów q_1, \dots, q_L z zależności

$$q_{ji} = \sum_{k=0}^{L-j} \beta_{(j+k)}^T q_1 \beta_{(i+k)} + \sum_{k=0}^{L-j-1} q_{(j+k+1)} \beta_{(i+k)} + \sum_{k=0}^{L-j-1} \beta_{(j+k)}^T q_{(i+k+1)}^T \quad (33)$$

W celu obliczenia gramianów sterowalności oraz obserwowalności możemy przekształcić dyskretne równanie Lapunowa z wykorzystaniem iloczynu Kroneckera. Biorąc pod uwagę specyficzną budowę macierzy modelu ESS, poszczególne elementy p_j oraz q_j gramianów tego modelu mogą być obliczone na podstawie Ln równań liniowych.

Twierdzenie 7 (Theorem I w [MR5]). *Rozważmy model ESS (29) aproksymujący właściwości dynamiczne systemu niecałkowitego rzędu (1). Każdy element p_j gramianu sterowalności (31) może być obliczony w wyniku rozwiązania następującego równania macierzowego*

$$(X_1 + X_2) \begin{bmatrix} \text{vec}(p_1) \\ \text{vec}(p_2) \\ \vdots \\ \text{vec}(p_L) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \text{vec}(BB^T) \\ \text{vec}(0_n) \\ \vdots \\ \text{vec}(0_n) \end{bmatrix} \quad (34)$$

gdzie $0_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą zerową, $\text{vec}(\cdot)$ oznacza operator wektoryzacji oraz

$$X_1 = \begin{bmatrix} -I_{n^2} & (\beta_1 \otimes I_n)K & \cdots & (\beta_{L-2} \otimes I_n)K & (\beta_{L-1} \otimes I_n)K \\ (\beta_1 \otimes I_n) & -I_{n^2} & \cdots & 0_{n^2} & 0_{n^2} \\ (\beta_2 \otimes I_n) & (\beta_1 \otimes I_n) & \cdots & 0_{n^2} & 0_{n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\beta_{L-1} \otimes I_n) & (\beta_{L-2} \otimes I_n) & \cdots & (\beta_1 \otimes I_n) & -I_{n^2} \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} (\hat{\beta}_L \otimes I_n)K & (\hat{\beta}_{L-1} \otimes I_n)K & (\hat{\beta}_{L-2} \otimes I_n)K & \cdots & (\hat{\beta}_1 \otimes I_n)K \\ 0_{n^2} & (\beta_2 \otimes I_n)K & (\beta_3 \otimes I_n)K & \cdots & (\beta_L \otimes I_n)K \\ 0_{n^2} & (\beta_3 \otimes I_n)K & (\beta_4 \otimes I_n)K & \cdots & 0_{n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n^2} & (\beta_{L-1} \otimes I_n)K & (\beta_L \otimes I_n)K & \cdots & 0_{n^2} \\ 0_{n^2} & (\beta_L \otimes I_n)K & 0_{n^2} & \cdots & 0_{n^2} \end{bmatrix}$$

gdzie $\hat{\beta}_i = \beta_L \beta_i$ oraz $0_{n^2} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $I_{n^2} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ są odpowiednio macierzami zerowymi oraz jednostkowymi. Symbol \otimes oznacza iloczyn Kroneckera oraz $K \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ jest macierzą komutacji użytą do zamiany zwektoryzowanej postaci macierzy do zwektoryzowanej postaci transpozycji tej macierzy

$$K \text{vec}(p_j) = \text{vec}(p_j^T)$$

przy czym $j = 1, \dots, L$ oraz β_j , $j = 1, \dots, L$, są opisane w równaniu (30).

Twierdzenie 8 (Theorem 2 w [MR5]). *Rozważmy model ESS (29) aproksymujący właściwości dynamiczne systemu niecałkowitego rzędu (1). Każdy element q_j gramianu obserwowalności (31) może być obliczony w wyniku rozwiązania następującego równania macierzowego*

$$(X_3 + X_4) \begin{bmatrix} \text{vec}(q_1) \\ \text{vec}(q_2) \\ \vdots \\ \text{vec}(q_L) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \text{vec}(C^T C) \\ \text{vec}(0_n) \\ \vdots \\ \text{vec}(0_n) \end{bmatrix} \quad (35)$$

gdzie

$$X_3 = \begin{bmatrix} -I_{n^2} & (\beta_1^T \otimes I_n) & \dots & (\beta_{L-2}^T \otimes I_n) & (\beta_{L-1}^T \otimes I_n) \\ 0_{n^2} & -I_{n^2} & \dots & (\beta_{L-3}^T \otimes I_n) & (\beta_{L-2}^T \otimes I_n) \\ 0_{n^2} & 0_{n^2} & \dots & (\beta_{L-4}^T \otimes I_n) & (\beta_{L-3}^T \otimes I_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{n^2} & 0_{n^2} & \dots & -I_{n^2} & (\beta_1^T \otimes I_n) \\ 0_{n^2} & 0_{n^2} & \dots & 0_{n^2} & -I_{n^2} \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L (\beta_k^T \otimes \beta_k^T) & (I_n \otimes \beta_1^T)K & (I_n \otimes \beta_2^T)K & \dots & (I_n \otimes \beta_{L-2}^T)K & (I_n \otimes \beta_{L-1}^T)K \\ \sum_{k=1}^{L-1} (\beta_k^T \otimes \beta_{k+1}^T) & (I_n \otimes \beta_2^T)K & (I_n \otimes \beta_3^T)K & \dots & (I_n \otimes \beta_{L-1}^T)K & (I_n \otimes \beta_L^T)K \\ \sum_{k=1}^{L-2} (\beta_k^T \otimes \beta_{k+2}^T) & (I_n \otimes \beta_3^T)K & (I_n \otimes \beta_4^T)K & \dots & (I_n \otimes \beta_L^T)K & 0_{n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^2 (\beta_k^T \otimes \beta_{k+L-2}^T) & (I_n \otimes \beta_{L-1}^T)K & (I_n \otimes \beta_L^T)K & \dots & 0_{n^2} & 0_{n^2} \\ (\beta_1^T \otimes \beta_L^T) & (I_n \otimes \beta_L^T)K & 0_{n^2} & \dots & 0_{n^2} & 0_{n^2} \end{bmatrix}$$

gdzie $0_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0_{n^2} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $I_{n^2} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ są odpowiednio macierzami zerowymi oraz jednostkowymi, $K \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ jest macierzą komutacji oraz β_j , $j = 1, \dots, L$, są opisane w równaniu (30).

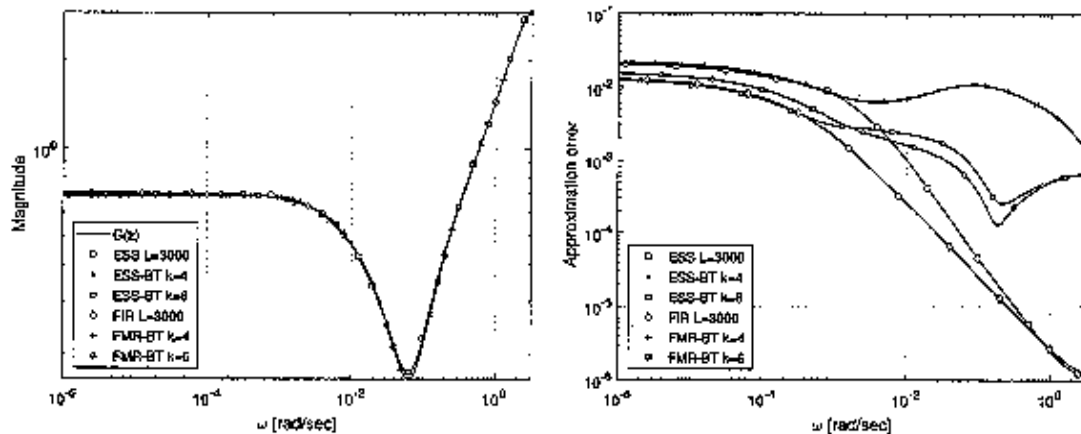
Przykład 4 ([MR5]). Rozważmy model systemu termicznego sterującego temperaturą profilu aluminiowego o stałych wartościach współczynników przewodności cieplnej oraz dyfuzyjności termicznej [31]. Model takiego układu w postaci dyskretnego systemu

niecałkowitego rzędu (1) z macierzami w postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0003 & -0.0095 & -0.122 & -0.5618 & 0.0002833 \\ \hline -0.8333 & -27.8126 & -457.935 & -4956.8 & 1.5 \end{array} \right]$$

oraz $\alpha = 0.5$ został zaproponowany w pracy [16].

Opracowane aproksymatory w postaci a) modelu ESS oraz b) modelu FIR (przedstawionego w rozdziale 5.4.2) o długościach implementacji $L = 3000$ poddane zostały redukcji metodą BT. W efekcie dla każdego z nich uzyskano modele zredukowane o rzędach $r = 4$ oraz $r = 6$. Charakterystyki modułu transmitancji modeli ESS oraz FIR, jak również modeli zredukowanych otrzymanych w wyniku redukcji w/w aproksymatorów zostały przedstawione na rys. 4. Uzyskane wyniki dowodzą, że modele ESS, FIR, jak również modele zredukowane poprawie aproksymują właściwości dynamiczne systemu niecałkowitego rzędu. Ponadto, na podstawie rys. 4 można stwierdzić, że zmniejszenie błędów aproksymacji modeli zredukowanych w wyniku zwiększenia ich rzędu jest ograniczona dokładnością aproksymacji modeli ESS oraz FIR dla niskich częstotliwości oraz stanu ustalonego. Zwiększenie dokładności aproksymacji może być zatem osiągnięte wyłącznie przez wydłużenie długości implementacji modeli ESS oraz FIR.



Rys. 4: Charakterystyki częstotliwościowe modułu transmitancji modeli oraz błędy aproksymacji.

Skrypty programu Matlab umożliwiające wyznaczenie wyników przedstawionych w pracy [MR5] mogą być pobrane ze strony: <http://doi.org/10.5281/zenodo.1257984>.

5.6 REDUKCJA RZĘDU MODELU NIECAŁKOWITEGO RZĘDU [MR4, MR7]

W pracach [MR2, MR3, MR5] całkowitorzędowe aproksymatory systemów niecałkowitego rzędu są obiektem procesu redukcji, którego zadaniem jest uzyskanie aproksymatorów

całkowitego i relatywnie niskiego rzędu. W takim przypadku termin *redukcja systemu niecałkowitego rzędu* jest odnoszony do redukcji rzędu jego złożonych, całkowitzzędowych aproksymatorów. Drugi obszar dla którego można użyć tego terminu łączy się z problemem redukcji wymiaru systemów równomiernego, niecałkowitego rzędu. Wynikiem procesu redukcji w tym przypadku jest model niecałkowitego rzędu o mniejszej liczbie zmiennych stanu. Prace [MR4] oraz [MR7] zajmują się problemem rozszerzenia zastosowania klasycznych metod redukcji z modeli całkowitego rzędu na systemy rzędu niecałkowitego.

5.6.1 REDUKCJA METODĄ BALANCED TRUNCATION MODELI NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

W pracach [MR4, MR7] rozważane są stabilne dyskretne systemy równomiernego, niecałkowitego rzędu (1) dla których $\alpha_i = \alpha$, $i = 1, \dots, n$. Załóżmy, że macierz T jest macierzą transformacji takiego systemu, która przekształca gramiany sterowalności i obserwowalności do postaci macierzy diagonalnych z wartościami szczególnymi Hankela (tak jak w równaniu (7)). Tak zdefiniowana macierz T umożliwia zrównoważenie systemu (1) w następujący sposób

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha \bar{x}[k+1] &= T A_f T^{-1} \bar{x}[k] + T B u[k] = \begin{bmatrix} A_r & \bar{A}_{f12} \\ \bar{A}_{f21} & \bar{A}_{f22} \end{bmatrix} \bar{x}[k] + \begin{bmatrix} B_r \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u[k] \\ \bar{y}[k] &= C T^{-1} \bar{x}[k] + D u[k] = \begin{bmatrix} C_r & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \bar{x}[k] + D u[k] \end{aligned}$$

gdzie macierze $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times n_u}$, $C_r \in \mathbb{R}^{n_y \times r}$ oraz $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ stanowią model zredukowany rzędu r będący częścią dominującą systemu

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha x_r[k+1] &= A_r x_r[k] + B_r u[k] \\ y_r[k] &= C_r x_r[k] + D u[k] \end{aligned} \quad (36)$$

Identycznie jak w przypadku modeli całkowitego rzędu, numerycznie odporne algorytmy wyznaczają prostokątną macierz transformacji/obcięcia $T_r \in \mathbb{R}^{r \times n}$ oraz jej prawą pseudo-inwersję $T_r^\# \in \mathbb{R}^{n \times r}$, które jednocześnie umożliwiają zrównoważenie oraz zredukowanie systemu. Jak zostało to przedstawione w Tabeli 1, algorytmy redukcji wymagają wyznaczenia gramianów systemu niecałkowitego rzędu. Bazując na definicjach gramianów w dziedzinie czasu dla modeli całkowitego rzędu, gramiany sterowalności oraz obserwowalności mogą zostać uogólnione na systemy niecałkowitego rzędu [MR7].

Twierdzenie 9 (Theorem 1 w [MR7]). *Rozważmy stabilny dyskretny system równomiernego, niecałkowitego rzędu (1) z różnicą Grünwalda-Letnikowa zdefiniowaną jak w równaniu (2). Wówczas gramiany sterowalności oraz obserwowalności mogą być wyznaczone z następujących zależności*

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k) B B^T \phi^T(k) \quad Q = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^T(k) C^T C \phi(k) \quad (37)$$

gdzie $\phi(k)$, $k = 0, 1, \dots$, są obliczane rekurencyjnie

$$\phi(k) = \begin{cases} I & k = 0 \\ (A_f + \alpha I)\phi(k-1) - \sum_{j=2}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} \phi(k-j) & k > 0 \end{cases}$$

Uwaga 6. Zastosowanie równania (37) do obliczenia gramianów sterowalności oraz obserwowalności wymagałoby wyznaczenia nieskończonej liczby elementów $\phi(k)$. Ponadto, obliczenie każdego elementu $\phi(k)$ wiąże się z wyznaczeniem różnicy niecałkowitego rzędu w zakresie czasu od 0 do k . Z tego powodu gramiany systemów niecałkowitego rzędu mogą być wyznaczone wyłącznie dla skończonego czasu $k < \infty$.

Twierdzenie 10 (Lemma 1 w [MR4]). *Rozważmy asymptotycznie stabilny dyskretny system równomiernego, niecałkowitego rzędu (1) z różnicą Grünwalda-Letnikowa zdefiniowaną jak w równaniu (2). Wówczas gramiany sterowalności oraz obserwowalności dla skończonego czasu $k_L < \infty$ mogą być wyznaczone z następujących zależności*

$$P(k_L) = \sum_{k=1}^{k_L} \phi(k-1) B B^T \phi^T(k-1), \quad Q(k_L) = \sum_{k=0}^{k_L} \phi^T(k) C^T C \phi(k) \quad (38)$$

gdzie $\phi(k)$, $k = 0, 1, \dots, k_L$, są obliczane rekurencyjnie

$$\phi(k) = \begin{cases} I & k = 0 \\ (A_f + \alpha I)\phi(k-1) - \sum_{j=2}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} \phi(k-j) & k > 0 \end{cases}$$

W przypadku, gdy odpowiedź modelu zredukowanego ma aproksymować odpowiedź systemu pełnego rzędu w ograniczonym przedziale czasu, wówczas zrównoważenie modelu może być wykonane na podstawie gramianów wyznaczonych dla wybranego interwału $[k_1, k_2]$

$$P(k_1, k_2) = P(k_2) - P(k_1), \quad Q(k_1, k_2) = Q(k_2) - Q(k_1) \quad (39)$$

gdzie $k_2 > k_1$ oraz $P(k)$, $Q(k)$ są wyznaczone z równania (38).

W równaniu (37) gramiany zostały zdefiniowane w dziedzinie czasu. Jednak możliwe jest również zdefiniowanie ich w dziedzinie częstotliwości. Przejście pomiędzy dziedziną czasu a częstotliwości może odbyć się na podstawie twierdzenia Plancherela. Na tej podstawie, w pracy [MR4] sformułowano definicję gramianów sterowalności oraz obserwowalności dla systemów niecałkowitego rzędu w dziedzinie częstotliwości.

Twierdzenie 11 (Lemma 2 w MR4). *Rozważmy asymptotycznie stabilny dyskretny system równomiernego, niecałkowitego rzędu (1) z różnicą Grünwalda-Letnikowa zdefiniowaną jak w równaniu (2). Wówczas gramiany sterowalności oraz obserwowalności mogą być wyznaczone z następujących zależności*

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (w(z)I - A_f)^{-1} B B^T (w^*(z)I - A_f^T)^{-1} d\theta \\ Q &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (w^*(z)I - A_f^T)^{-1} C^T C (w(z)I - A_f)^{-1} d\theta \end{aligned} \quad (40)$$

gdzie $w(z) = z(1 - z^{-1})^\alpha$, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Symbol * oznacza sprzężenie hermitowskie macierzy.

W przypadku, gdy charakterystyka częstotliwościowa modelu zredukowanego ma aproksymować charakterystykę częstotliwościową systemu pełnego rzędu w ograniczonym przedziale częstotliwości, wówczas zrównoważenie modelu może być wykonane na podstawie gramianów wyznaczonych dla wybranego interwału $[\Theta_1, \Theta_2]$. Podobnie jak dla gramianów wyznaczonych dla zadanego przedziału czasu, gramiany dla zadanego przedziału częstotliwości $[\Theta_1, \Theta_2]$ mogą być obliczone według zależności

$$P(\Theta_1, \Theta_2) = P(\Theta_2) - P(\Theta_1), \quad Q(\Theta_1, \Theta_2) = Q(\Theta_2) - Q(\Theta_1) \quad (41)$$

gdzie $\Theta_1 < \Theta_2$ oraz $P(\Theta)$, $Q(\Theta)$ są wyznaczone z równań

$$\begin{aligned} P(\Theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Theta}^{+\Theta} (w(z)I - A_f)^{-1} B B^T (w^*(z)I - A_f^T)^{-1} d\theta \\ Q(\Theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Theta}^{+\Theta} (w^*(z)I - A_f^T)^{-1} C^T C (w(z)I - A_f)^{-1} d\theta \end{aligned} \quad (42)$$

5.6.2 REDUKCJA METODĄ FREQUENCY WEIGHTED MODELI NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

Spełnienie wymagań dotyczących dokładności aproksymacji w zadanym przedziale częstotliwości $[\Theta_1, \Theta_2]$ może być również osiągnięta przez implementację częstotliwościowych funkcji wagowych w postaci zewnętrznych modeli dynamicznych dołączonych do wejść i/lub wyjść systemu niecałkowitego rzędu [1, ch. 7.6]. Takie podejście, identycznie jak dla systemów całkowitego rzędu, tworzy metodę redukcji FW, która jest uogólnieniem metody BT.

Rozważamy asymptotycznie stabilny dyskretny system całkowitego lub niecałkowitego rzędu tworzący wejściową funkcję wagową $H_i = \{A_i, B_i, C_i, D_i\}$ w postaci

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha_i} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u_i(k), \\ y_i(k) &= C_i x_i(k) + D_i u_i(k) \end{aligned} \quad (43)$$

oraz wyjściową funkcję wagową $H_o = \{A_o, B_o, C_o, D_o\}$

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha_o} x_o(k+1) &= A_o x_o(k) + B_o u_o(k), \\ y_o(k) &= C_o x_o(k) + D_o u_o(k) \end{aligned} \quad (44)$$

o rzędach odpowiednio n_i oraz n_o . Zakładając, że połączenie systemu z funkcjami wagowymi nie spowoduje zredukowania par biegun-zero, GH_i oraz H_oG można przedstawić następująco w przestrzeni stanu [8, 19, 54, 55, 57]

$$\begin{aligned} GH_i &= \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_i & \bar{B}_i \\ \hline \bar{C}_i & \bar{D}_i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_f & BC_i & BD_i \\ 0 & A_i & B_i \\ \hline C & DC_i & DD_i \end{array} \right] \\ H_oG &= \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_o & \bar{B}_o \\ \hline \bar{C}_o & \bar{D}_o \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_f & 0 & B \\ B_o C & A_o & B_o D \\ \hline D_o C & C_o & D_o D \end{array} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Jak zostało to wspomniane w rozdziale 5.4.3 dla modeli całkowitego rzędu, gramian sterowalności może być wyznaczony na podstawie modelu GH_i , natomiast gramian obserwowalności na podstawie modelu H_oG .

Twierdzenie 12 (Lemma 3 w [MR4]). *Rozważmy asymptotycznie stabilne połączenie GH_i oraz H_oG (45) obejmujące asymptotycznie stabilny dyskretny system równomiernego, niecałkowitego rzędu (1) z różnicą Grünwalda-Letnikowa (2) oraz funkcje wagowe (43) i (44). Wówczas gramiany sterowalności oraz obserwowalności dla skończonego czasu $k_L < \infty$ mogą być wyznaczone z zależności*

$$P_i(k_L) = \sum_{k=1}^{k_L} \phi_i(k-1) \bar{B}_i \bar{B}_i^T \phi_i^T(k-1), \quad Q_o(k_L) = \sum_{k=0}^{k_L} \phi_o^T(k) \bar{C}_o^T \bar{C}_o \phi_o(k) \quad (46)$$

gdzie $\phi_i(k)$, $\phi_o(k)$, $k = 0, 1, \dots, k_L$, są obliczane rekurencyjnie

$$\phi_i(k) = \begin{cases} I & k = 0 \\ (\bar{A}_i + \bar{\alpha}_i) \phi_i(k-1) - \sum_{j=2}^k \psi_i(j) \phi_i(k-j) & k > 0 \end{cases}$$

$$\phi_o(k) = \begin{cases} I & k = 0 \\ (\bar{A}_o + \bar{\alpha}_o) \phi_o(k-1) - \sum_{j=2}^k \psi_o(j) \phi_o(k-j) & k > 0 \end{cases}$$

dla $\bar{\alpha}_i = \text{diag}(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_n, \underbrace{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_1}}_{n_i})$, $\bar{\alpha}_o = \text{diag}(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_n, \underbrace{\alpha_{o_1}, \dots, \alpha_{o_1}}_{n_o})$ oraz

$$\psi_i(j) = (-1)^j \text{diag} \left(\underbrace{\binom{\alpha}{j}, \dots, \binom{\alpha}{j}}_n, \underbrace{\binom{\alpha_i}{j}, \dots, \binom{\alpha_i}{j}}_{n_i} \right)$$

$$\psi_o(j) = (-1)^j \text{diag} \left(\underbrace{\binom{\alpha}{j}, \dots, \binom{\alpha}{j}}_n, \underbrace{\binom{\alpha_o}{j}, \dots, \binom{\alpha_o}{j}}_{n_o} \right)$$

Należy podkreślić, że zastosowanie funkcji wagowych wpływa na rząd gramianów sterowalności P_i oraz obserwowalności Q_i . Z tego względu mogą one być podzielone na macierze blokowe

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, \quad Q_o = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (47)$$

w których wymiary macierzy $P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz $Q_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ są identyczne jak macierzy stanu A_f . Ostatecznie, gramiany FW sterowalności \tilde{P} oraz obserwowalności \tilde{Q} o wymiarach $n \times n$ mogą być wyznaczone na podstawie algorytmu Enssa [8, 54]

$$\tilde{P} = P_{11}, \quad \tilde{Q} = Q_{11} \quad (48)$$

Pomimo swojej prostoty, użycie algorytmu Enssa nie gwarantuje zachowania stabilności modeli zredukowanych w przypadku zastosowania obu funkcji wagowych jednocześnie (ang. two-sided weighting). Z tego powodu w literaturze zaproponowano algorytmy rozwiązujące problem zachowania stabilności [19, 29, 49, 54, 55].

Gramiany \tilde{P} oraz \tilde{Q} mogą być również przedstawione w dziedzinie częstotliwości. Oddziaływanie wejścia na stan układu (ang. input-to-state map) oraz oddziaływanie stanu układu na wyjście (ang. state-to-output map) systemu niecałkowitego rzędu jest modyfikowane przez dynamikę dołączonych funkcji wagowych. Z tego powodu możliwe jest uogólnienie Twierdzenia 11 na postać gramianów FW sterowalności i obserwowalności.

Twierdzenie 13 (Lemma 4 w [MR4]). *Rozważmy asymptotycznie stabilne połączenie GH_i oraz H_oG (45) obejmujące asymptotycznie stabilny dyskretny system równomiernego, niecałkowitego rzędu (1) z różnicą Grünwalda-Letnikowa (2) oraz funkcje wagowe (43) i (44). Wówczas gramiany FW sterowalności \tilde{P} oraz obserwowalności \tilde{Q} mogą być wyznaczone z następujących zależności*

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (w(z)I - A_f)^{-1} B H_i(w_i(z)) H_i^T(w_i^*(z)) B^T (w^*(z)I - A_f^T)^{-1} d\theta \\ \tilde{Q} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (w^*(z)I - A_f^T)^{-1} C^T H_o^T(w_o^*(z)) H_o(w_o(z)) C (w(z)I - A_f)^{-1} d\theta\end{aligned}\quad (49)$$

gdzie $H_i(w_i(z)) = D_i + C_i(w_i(z)I - A_i)^{-1}B_i$, $H_o(w_o(z)) = D_o + C_o(w_o(z)I - A_o)^{-1}B_o$ oraz $w(z) = z(1 - z^{-1})^\alpha$, $w_i(z) = z(1 - z^{-1})^{\alpha_i}$, $w_o(z) = z(1 - z^{-1})^{\alpha_o}$, dla $z = e^{j\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

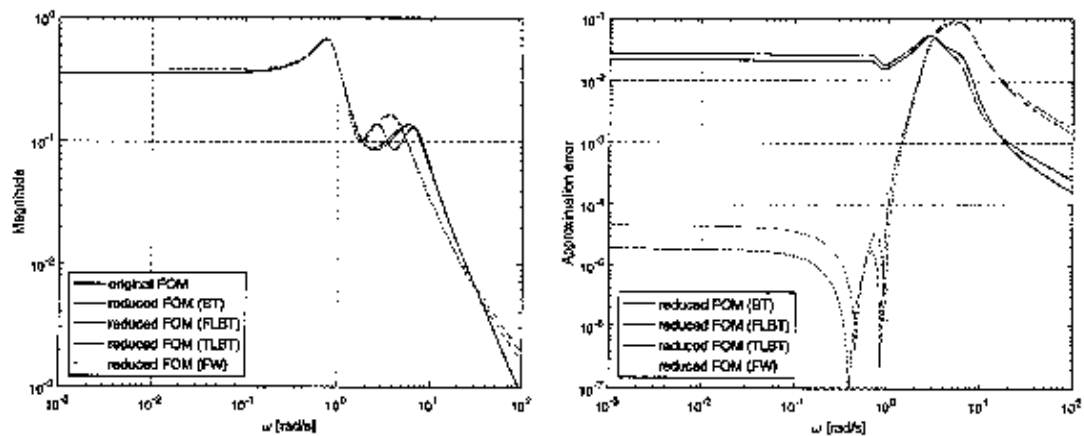
Wprowadzone definicje gramianów sterowalności oraz obserwowalności dla systemów niecałkowitego rzędu mogą być zastosowane w metodach redukcji bazujących na zrównoważonej postaci modelu (Tabela 1). Zastosowanie gramianów wyznaczonych dla wybranego interwału czasu skutkuje metodą TLBT, gramianów wyznaczonych w wybranym przedziale częstotliwości prowadzi do metody FLBT, natomiast zastosowanie funkcji wagowych wprowadza wcześniej wspomnianą metodę FW.

Przykład 5 ([MR4]). Rozważmy dyskretny system równomiernego, niecałkowitego rzędu (4) z $\alpha = 0.85$, okresem próbkowania $h = 0.01$ oraz macierzami opisującymi dynamikę systemu w postaci

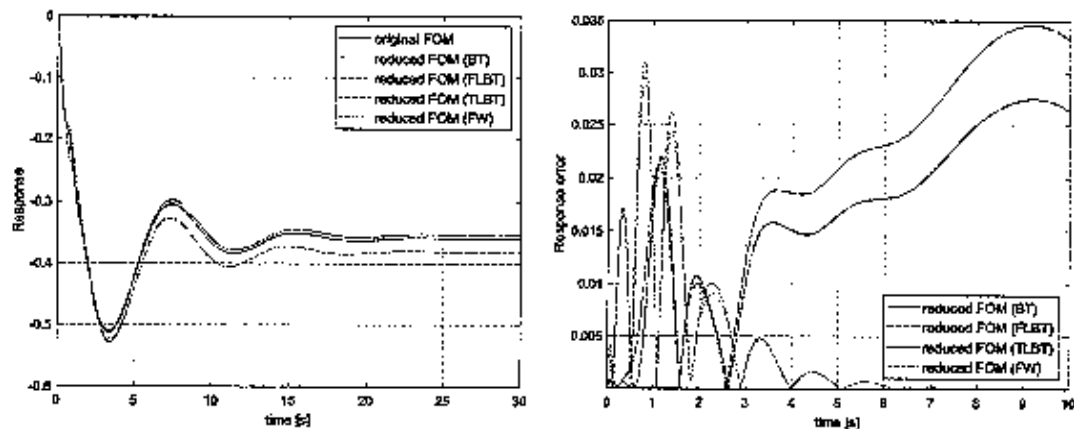
$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_f & \bar{B} \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5.4545 & 4.5455 & 0 & -0.0545 & 0.0455 & 0 & 0.0909 \\ 10 & -21 & 11 & 0.1 & -0.21 & 0.11 & 0.4 \\ 0 & 5.5 & -6.5 & 0 & 0.055 & -0.065 & -0.5 \\ \hline 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Wynikiem redukcji modeli pełnego rzędu są modele zredukowane o czterech zmiennych stanu. Charakterystyki modułu transmitancji systemu pierwotnego, modeli zredukowanych, jak również błędy aproksymacji zostały przedstawione na rys. 5. Rys. 6 przedstawia

odpowiedzi czasowe modeli oraz błędy aproksymacji na wymuszenie jednostkowe. Uzyskane wyniki wskazują, że zastosowanie gramianów sterowalności i obserwowalności (40) oraz gramianów wyznaczonych w ograniczonym przedziale czasu $[0, 10]$ [s] uniemożliwia dokładną aproksymację systemu zarówno w stanie ustalonym, jak również dla niskich częstotliwości. W celu poprawy aproksymacji tego zakresu częstotliwości konieczne jest zastosowanie gramianów wyznaczonych w ograniczonym przedziale częstotliwości (metoda FLBT) lub użycia funkcji wagowych w postaci filtrów dolnoprzepustowych dla metody FW. W omawianym przykładzie wybrano przedział częstotliwości $\Theta \in [0, 0.01]$ [rad/s] dla metody FLBT oraz filtry dolnoprzepustowe Butterwortha rzędu $n_f = 5$ oraz częstotliwości granicznej $\omega_f = 0.01$ [rad/s] dla metody FW.



Rys. 5: Charakterystyki częstotliwościowe modułu transmitancji modeli oraz błędy aproksymacji.



Rys. 6: Odpowiedź modeli na skok jednostkowy oraz błędy aproksymacji.

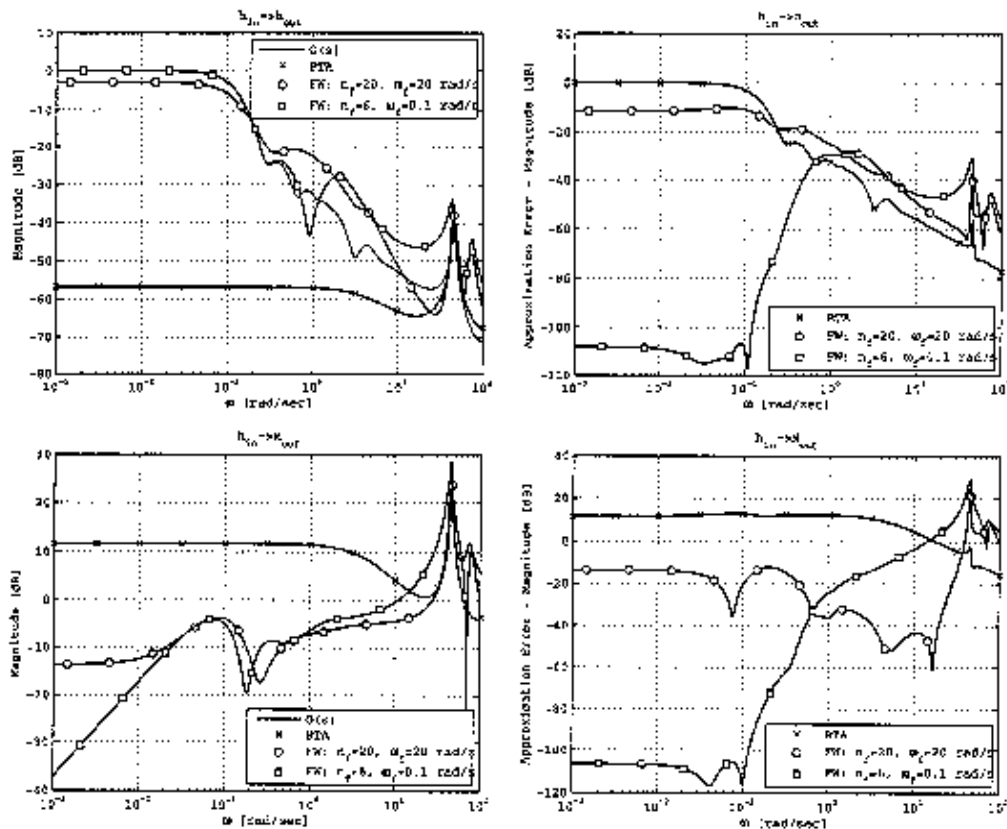
Skrypty programu Matlab umożliwiające wyznaczenie wyników przedstawionych w pracach [MR4] oraz [MR7] mogą być pobrane odpowiednio ze stron: <http://doi.org/10.5281/zenodo.2322833> oraz <http://doi.org/10.5281/zenodo.1299269>.

5.7 OPTIMALIZACJA WARTOŚCI PARAMETRÓW METOD REDUKCJI [MR6]

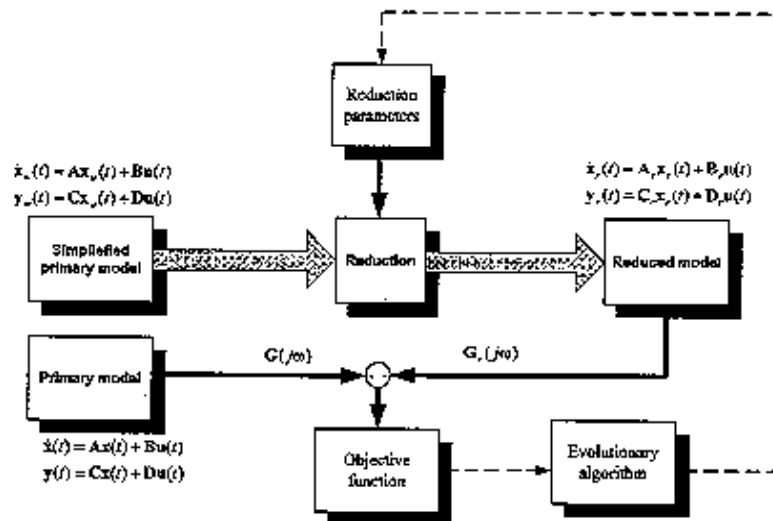
Zadaniem poprawnie przeprowadzonej operacji redukcji jest wyznaczenie modelu zredukowanego o jak najniższym rzędzie, który będzie się charakteryzował określonym poziomem błędu aproksymacji dla zadanego zakresu adekwatności. Dla metod TLBT, FLBT oraz FW poważnym problemem praktycznym stanowi wybór przedziałów czasu/częstotliwości dla których liczone są gramiany sytemu oraz charakterystyk częstotliwościowych dla funkcji wagowych. Właściwości dynamiczne funkcji wagowych oraz interwały czasu/częstotliwości mogą być dobrane na podstawie znajomości charakterystyk częstotliwościowych lub odpowiedzi na skok jednostkowy przy założonym zakresie adekwatności modelu zredukowanego. Zastosowanie optymalnych wartości parametrów, tj. przedziały czasu $[k_1, k_2]$ i/lub przedziały częstotliwości $[\Theta_1, \Theta_2]$ (dla metod TLBT oraz FLBT), jak również charakterystyki częstotliwościowe filtrów wagowe (dla metody FW) umożliwia znaczne zmniejszenie błędów aproksymacji w ograniczonych zakresach czasu i częstotliwości. Należy jednak zwrócić uwagę, że zwłaszcza dla systemów MIMO dobór tych parametrów nie jest zadaniem trywialnym.

Przykład 6 ([MR6]). Rozważmy model strefy dogrzewu rur ekranowych parownika kotła energetycznego BP-1150 zawierającego 8250 zmiennych stanu o zakresie adekwatności $\omega < 20$ [rad/s]. Szczegóły budowy modelu są przedstawione w pracy [MR29]. Charakterystyki modułu transmitancji systemu oraz modeli zredukowanych dla dwóch wybranych torów systemu, jak również błędy aproksymacji zostały przedstawione na rys. 7. Model zredukowany otrzymano w wyniku redukcji metodami BT oraz FW z dwoma różnymi funkcjami wagowymi dołączonymi do wejść oraz wyjść systemu w postaci filtrów dolnoprzepustowych Butterwortha o parametrach: $n_{f(1)} = 20$, $\omega_{f(1)} = 20$ [rad/s] oraz $n_{f(2)} = 6$, $\omega_{f(2)} = 0.1$ [rad/s]. Jak można zauważyć na przedstawionych charakterystykach (rys. 7), zastosowanie filtrów o częstotliwości granicznej $\omega_{f(2)} = 0.1$ [rad/s] umożliwia osiągnięcie znacznie lepszej jakości aproksymacji charakterystyk w zakresie adekwatności $\omega \in (0 - 20)$ [rad/s].

Zastosowanie prostych filtrów dolnoprzepustowych o częstotliwości granicznej równej zakresowi adekwatności modelu nie zawsze prowadzi do uzyskania poprawnych wyników redukcji. Jest to szczególnie częste dla modeli MIMO o znacznych różnicach modułu transmitancji dla różnych torów i/lub znacznej zmienności modułu transmitancji w funkcji częstotliwości. Konieczny jest zatem dobór parametrów funkcji wagowych poprzez zastosowanie algorytmów optymalizacji. Należy jednak również podkreślić, że wartość błędu aproksymacji będącego funkcją celu algorytmu optymalizacji często posiada znaczną liczbę minimów lokalnych w funkcji parametrów redukcji [MR6, MR30]. Z tego względu konieczne jest zastosowanie algorytmów optymalizacji globalnej, które umożliwią przeszukanie dużej przestrzeni potencjalnych rozwiązań, przy jednoczesnej odporności na utnięcie w lokalnym minimum. W celu rozwiązania tego problemu zaproponowano zastosowanie algorytmów ewolucyjnych. Jako, że algorytm redukcji modelu jest procesem czasochłonnym oraz wymagającym znacznej mocy obliczeniowej dla modeli o dużej złożoności, zaproponowano modyfikację klasycznego algorytmu, wprowadzając koncepcję dwustopniowego algorytmu ewolucyjnego. Opiera on działanie na redukcji uproszczonego



Rys. 7: Charakterystyki częstotliwościowe modułu transmitancji modeli oraz błędy aproksymacji.



Rys. 8: Dwustopniowy algorytm ewolucyjny doboru parametrów redukcji

modelu pierwotnego (model może być otrzymany na skutek wstępnej redukcji rzędu lub uproszczonej procedury modelowania systemu) oraz wyznaczenia błędów aproksymacji otrzymanych na podstawie oryginalnych charakterystyk systemu (rys. 8). Takie podejście umożliwia znaczne zmniejszenie złożoności obliczeniowej oraz czasu wyznaczenia modelu zredukowanego o zakładanym zakresie adekwatności.

5.8 PODSUMOWANIE OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

Do najważniejszych oryginalnych wyników, będących przedmiotem przedstawionego osiągnięcia habilitacyjnego, zaliczyć należy:

- W pracy [MR2] zaproponowana została nowa metoda aproksymacji dyskretnych systemów niecałkowitego rzędu za pomocą modeli całkowitego rzędu o skończonej odpowiedzi impulsowej FIR. Zaproponowana struktura modelu FIR wymaga zastosowania wysokiej wartości długości implementacji w celu uzyskania dobrej jakości aproksymacji. Jednakże za pomocą technik redukcji bazujących na zrównoważeniu modelu możliwe jest znaczne zmniejszenie jego rzędu. Wprowadzona *analityczna* postać faktoryzacji Choleskiego gramianów sterowalności oraz obserwowalności znacznie zmniejsza złożoność obliczeniową algorytmu FMR-BT w porównaniu do klasycznej metody BT, opartej na rozwiązywaniu równań Lapunowa. W rezultacie otrzymano efektywną metodę aproksymacji dyskretnych systemów niecałkowitego rzędu.
- W pracy [MR1] zaproponowano nową metodę redukcji FMR-FW opartą na zastosowaniu metody FW do redukcji modeli całkowitego rzędu aproksymujących właściwości dynamiczne systemów o dużej złożoności. Zaproponowano *analityczną* postać faktoryzacji gramianów sterowalności oraz obserwowalności dla modeli FIR z uwzględnieniem funkcji wagowych. Biorąc pod uwagę, że wyznaczenie gramianów na podstawie równań Lapunowa jest najbardziej kosztownym obliczeniowo elementem algorytmu redukcji, zaproponowana metoda FMR-FW jest znacznie bardziej efektywna numerycznie. Klasa złożoności numerycznej zaproponowanego algorytmu $O(n^2)$ jest znacznie niższa w porównaniu do klasycznej metody FW $O(n^3)$. Z tego powodu algorytm FMR-FW jest szczególnie przydatny do redukcji systemów o bardzo dużej złożoności. Ponadto może być zastosowany również do redukcji modeli FIR aproksymujących systemy niecałkowitego rzędu.
- W pracy [MR3] został zaproponowany nowy rodzaj metodologii redukcji metodą FMR-FW z zastosowaniem cross gramianów modeli FIR aproksymujących właściwości dynamiczne dyskretnych systemów SISO nierównomiernego, niecałkowitego rzędu. Głównym wkładem pracy jest opracowanie *analitycznej* postaci cross gramianu aproksymatora FIR z uwzględnieniem funkcji wagowych. Pozwala to na uniknięcie bardzo kosztownego obliczeniowo rozwiązywania równania Sylwestra. W wyniku zaproponowanej procedury uzyskano numerycznie efektywny algorytm redukcji umożliwiający uzyskanie modeli całkowitego i stosunkowo niskiego rzędu.

- W pracy [MR5] została zaproponowana nowa metodologia wyznaczania modeli całkowego i stosunkowo niskiego rzędu aproksymujących dyskretne systemy nierównomiernego, niecałkowego rzędu. Zastosowana procedura bazuje na redukcji metodą BT modelu ESS. Głównym wkładem pracy jest opracowanie nowych algorytmów obliczania gramianów sterowalności oraz obserwowalności modelu wykorzystujących specyficzną strukturę modelu ESS, które są szczególnie efektywne numerycznie dla modeli MIMO o niskim rzędzie i wysokiej wartości długości implementacji. Zaproponowany algorytm ESS-BT ma porównywalną złożoność obliczeniową do metod bazujących na modelu FIR (klasa $O(n^2)$).
- W pracach [MR4] i [MR7] przedstawiono rezultaty związane z redukcją dyskretnych systemów równomiernego, niecałkowego rzędu, których wynikiem jest również model niecałkowego rzędu, lecz o niższych wymiarach. Głównym wkładem pracy [MR7] jest zdefiniowanie gramianów sterowalności oraz obserwowalności systemów niecałkowego rzędu w dziedzinie czasu oraz propozycja algorytmu obliczenia ich aproksymacji przy redukcji metodą BT. W pracy [MR4] przedstawiono natomiast uogólnione definicje gramianów w ograniczonych przedziałach czasu dyskretnego $[k_1, k_2]$ oraz częstotliwości $[\Theta_1, \Theta_2]$. Sformułowano również definicje gramianów dla systemu z uwzględnieniem funkcji wagowych. Przedstawione rezultaty umożliwiają zastosowanie metod TLBT, FLBT oraz FW przy redukcji systemów niecałkowego rzędu.
- W pracy [MR6] przedstawiono metodologię doboru i optymalizacji parametrów metod redukcji, tj. TLBT, FLBT oraz FW, z wykorzystaniem algorytmów ewolucyjnych. Zaproponowane podejście jest szczególnie istotne dla złożonych modeli MIMO, których wartość modułu transmitancji znacznie różni się dla poszczególnych torów modelu i/lub podlega znacznej zmienności w funkcji częstotliwości. W celu zwiększenia efektywności optymalizacji parametrów redukcji wprowadzono również koncepcję dwustopniowego algorytmu ewolucyjnego, który umożliwia znaczne zmniejszenie złożoności obliczeniowej oraz czasu wyznaczenia modelu zredukowanego o zakładanym zakresie adekwatności.

LITERATURA

- [1] Antoulas, A.: *Approximation of Large-Scale Dynamical System*. SIAM, Philadelphia, PA (2005)
- [2] Bagley, R.L., Calico, R.A.: Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 14(2), 304–311 (1991)
- [3] Benner, P., Kürschner, P., Saak, J.: Frequency-limited balanced truncation with low-rank approximations. *SIAM Journal on Scientific Computing* 38(1), A471–A499 (2016)
- [4] Benner, P., Ohlberger, M., Cohen, A., Willcox, K. (eds.): *Model Reduction and Approximation: Theory and Algorithms*. SIAM, Philadelphia, PA (2017)
- [5] Biswas, K., Bohannon, G., Caponetto, R., Mendes Lopes, A., Tenreiro Machado, J.A.: *Fractional-Order Devices*. Springer International Publishing (2017)

- [6] Dhabale, A.S., Dive, R., Aware, M.V., Das, S.: A new method for getting rational approximation for fractional order differintegrals. *Asian Journal of Control* 17(6), 2143–2152 (2015)
- [7] Dzieliński, A., Sierociuk, D.: Stability of discrete fractional order state-space systems. *Journal of Vibration and Control* 14(9-10), 1543–1556 (2008)
- [8] Enns, D.: Model reduction with balanced realizations: An error bound and frequency weighted generalization. In: 23rd IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 127–132 (1984)
- [9] Ferdi, Y.: Computation of fractional order derivative and integral via power series expansion and signal modelling. *Nonlinear Dynamics* 46(1-2), 1–15 (2006)
- [10] Fernando, K., Nicholson, H.: On the structure of balanced and other principal representations of SISO systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 28(2), 228–231 (1983)
- [11] Freeborn, T.J., Maundy, B., Elwakil, A.S.: Fractional-order models of supercapacitors, batteries and fuel cells: a survey. *Materials for Renewable and Sustainable Energy* 4(3) (2015)
- [12] Gabano, J., Poinot, T.: Fractional modelling and identification of thermal systems. *Signal Processing* 91(3), 531 – 541 (2011)
- [13] Garrappa, R., Maione, G.: Model order reduction on Krylov subspaces for fractional linear systems. *IFAC Proceedings Volumes* 46(1), 143 – 148 (2013)
- [14] Gawronski, W., Juang, J.: Model reduction in limited time and frequency intervals. *International Journal of Systems Science* 21(2), 349–376 (1990)
- [15] Guermah, S., Djennoune, S., Bettayeb, M.: Controllability and observability of linear discrete-time fractional-order systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 18(2), 213 – 222 (2008)
- [16] Guermah, S., Djennoune, S., Bettayeb, M.: Discrete-time fractional-order systems: Modeling and stability issues. In: M. Mahmoud (ed.) *Advances in Discrete Time Systems*, pp. 183–212. InTech (2012)
- [17] Gugercin, S., Willcox, K.: Krylov projection framework for fourier model reduction. *Automatica* 44(1), 209 – 215 (2008)
- [18] Hinze, C., Ohlberger, M.: Cross-Gramian-based model reduction: A comparison. In: P. Benner, M. Ohlberger, A. Patera, G. Rozza, K. Urban (eds.) *Model Reduction of Parametrized Systems*, pp. 271–283. Springer International Publishing (2017)
- [19] Imran, M., Ghafoor, A., Sreeram, V.: A frequency weighted model order reduction technique and error bounds. *Automatica* 50(12), 3304–3309 (2014)
- [20] Ionescu, C., Lopes, A., Copot, D., Machado, J., Bates, J.: The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 51, 141 – 159 (2017)
- [21] Jiang, Y.L., Xiao, Z.H.: Arnoldi-based model reduction for fractional order linear systems. *International Journal of Systems Science* 46(8), 1411–1420 (2015)
- [22] Kaczorek, T.: Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* 56(4), 313–317 (2008)

- [23] Klamka, J.: Controllability and minimum energy control problem of fractional discrete-time systems. In: D. Baleanu, Z. Gvenc, J. Machado (eds.) *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, pp. 503–509. Springer, Dordrecht (2010)
- [24] Klamka, J., Czornik, A., Niezabitowski, M., Babiarz, A.: Controllability and minimum energy control of linear fractional discrete-time infinite-dimensional systems. In: *11th IEEE International Conference on Control Automation (ICCA)*, pp. 1210–1214 (2014)
- [25] Krajewski, W., Viaro, U.: A method for the integer-order approximation of fractional-order systems. *Journal of the Franklin Institute* **351**(1), 555 – 564 (2014)
- [26] Kumar, M., Rawat, T.K.: Optimal design of fir fractional order differentiator using cuckoo search algorithm. *Expert Systems with Applications* **42**(7), 3433 – 3449 (2015)
- [27] Kürschner, P.: Balanced truncation model order reduction in limited time intervals for large systems. *Advances in Computational Mathematics* **44**(6), 1821–1844 (2018)
- [28] Laub, A., Heath, M., Paige, C., Ward, R.: Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control* **32**(2), 115–122 (1987)
- [29] Lin, C., Chiu, T.: Model reduction via frequency weighted balanced realization. *Theory and Advanced Technology* **8**, 341–451 (1992)
- [30] Liu, F., Burrage, K.: Novel techniques in parameter estimation for fractional dynamical models arising from biological systems. *Computers & Mathematics with Applications* **62**(3), 822 – 833 (2011)
- [31] Malti, R., Sabatier, J., Akçay, H.: Thermal modeling and identification of an aluminum rod using fractional calculus. *IFAC Proceedings Volumes* **42**(10), 958 – 963 (2009)
- [32] Mashayekhi, S., Miles, P., Hussaini, M.Y., Oates, W.S.: Fractional viscoelasticity in fractal and non-fractal media: Theory, experimental validation, and uncertainty analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **111**, 134 – 156 (2018)
- [33] Mitkowski, W., Skruch, P.: Fractional-order models of the supercapacitors in the form of RC ladder networks. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* **61**(3), 581–587 (2013)
- [34] Monje, C., Chen, Y., Vinagre, B., Xue, D., Feliu-Batlle, V.: *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Series on Advances in Industrial Control, Springer, London, UK (2010)
- [35] Monje, C.A., Vinagre, B.M., Feliu, V., Chen, Y.: Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. *Control Engineering Practice* **16**(7), 798 – 812 (2008)
- [36] Moore, B.: Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. *IEEE Trans. on Automatic Control* **AC-26**(1), 17–32 (1981)
- [37] Oprządkiewicz, K., Gawin, E., Mitkowski, W.: Modeling heat distribution with the use of a non-integer order, state space model. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **26**(4), 749 – 756 (2016)
- [38] Ostalczyk, P.: *Discrete Fractional Calculus: Applications in Control and Image Processing*. World Scientific (2016)
- [39] Penzl, T.: Algorithms for model reduction of large dynamical systems. *Linear Algebra Appl.* **415**, 322–343 (2006)

- [40] Petras, I.: *Fractional-Order Nonlinear Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2011)
- [41] Podlubny, I.: *Fractional differential equations*. Academic Press, Orlando, FL (1999)
- [42] Podlubny, I.: Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(1), 208–214 (1999)
- [43] Poinot, T., Trigeassou, J.C.: Identification of fractional systems using an output-error technique. *Nonlinear Dynamics* **38**(1), 133–154 (2004)
- [44] Rivero, M., Rogosin, S.V., Tenreiro Machado, J.A., Trujillo, J.J.: Stability of fractional order systems. *Mathematical Problems in Engineering* (2013). Article ID: 356215
- [45] Rossikhin, Y.A., Shitikova, M.V.: Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews* **63**(1) (2009)
- [46] Schilders, W., van der Vorst, H.A., Rommes, J. (eds.): *Model order reduction: theory, research aspects and applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2008)
- [47] Shen, J., Lam, J.: H_∞ model reduction for positive fractional order systems. *Asian Journal of Control* **16**(2), 441–450 (2014)
- [48] Sierociuk, D., Dzieliński, A., Sarwas, G., Petras, I., Podlubny, I., Skovranek, T.: Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **371**(1990) (2013). Article ID: 20120146
- [49] Sreeram, V., Sahlan, S.: Improved results on frequency-weighted balanced truncation and error bounds. *Int. J. Robust Nonlin.* **22**(11), 1195–1211 (2012)
- [50] Stanisławski, R.: New results in stability analysis for LTI SISO systems modeled by GL-discretized fractional-order transfer functions. *Fractional Calculus and Applied Analysis* **20**(1), 243–259 (2017)
- [51] Stanisławski, R., Latawiec, K.J.: Fractional-order discrete-time Laguerre filters – a new tool for modeling and stability analysis of fractional-order LTI SISO systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society* **2016**, 1–9 (2016). Article ID: 9590687
- [52] Tavakoli-Kakhki, M., Haeri, M.: Model reduction in commensurate fractional-order linear systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* **223**(4), 493–505 (2009)
- [53] Tavazoei, M.S., Haeri, M.: Rational approximations in the simulation and implementation of fractional-order dynamics: A descriptor system approach. *Automatica* **46**(1), 94 – 100 (2010)
- [54] Varga, A., Anderson, B.: Accuracy-enhancing methods for balancing-related frequency-weighted model and controller reduction. *Automatica* **39**(5), 919–927 (2003)
- [55] Wang, G., Sreeram, V., Liu, W.Q.: A new frequency-weighted balanced truncation method and an error bound. *IEEE Trans. on Automatic Control* **44**(9), 1734–1737 (1999)
- [56] Willcox, K., Megretski, A.: Fourier series for accurate, stable, reduced-order models in large-scale linear applications. *SIAM J. Sci. Comput.* **26**(3), 944–962 (2005)
- [57] Zulfiqar, U., Imran, M., Ghafoor, A., Liaquat, M.: A new frequency-limited interval gramians-based model order reduction technique. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* **64**(6), 680–684 (2017)

6 OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

Oprócz przedstawionego powyżej osiągnięcia habilitacyjnego autor niniejszego wniosku uczestniczył również w pracach zespołów badawczych funkcjonujących na Politechnice Opolskiej na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Wydziale Mechanicznym oraz Wydziale Wychowania Fizycznego i Fizjoterapii. Ponadto autor współpracował z pracownikami wydziału Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie. W szczególności zrealizowane badania były związane z następującymi zagadnieniami:

- Analiza stabilności dyskretnych układów niecałkowitego rzędu
W tym obszarze autor uczestniczył w procesie opracowywania nowych metod analizy stabilności dyskretnych modeli niecałkowitego rzędu, które otrzymane są w wyniku dyskretyzacji układów ciągłych. Nowe wyniki, opublikowane w pracy [MR9], wykazały, że wybór metody dyskretyzacji istotnie wpływa na stabilność układu dyskretnego. Okazuje się, że w przypadku metody dyskretyzacji Al-Alaoui współczynnik wagowy dyskretyzatora determinuje kryterium stabilności układu dyskretnego. Ponadto w przedmiotowej pracy wykazano, że transformacja biliniowa Tustina, podobnie jak w przypadku układów całkowitego rzędu, jest niezmiennicza z punktu widzenia stabilności systemu.
- Modelowanie systemów niecałkowitego rzędu z zastosowaniem dyskretnych filtrów Laguerre'a.
Dyskretne filtry Laguerre'a mogą być efektywnym narzędziem w aproksymacji różnicy Grünwalda-Letnikowa za pomocą modeli całkowitego rzędu. Należy jednak zaznaczyć, że implementacja modeli Laguerre'a w modelach systemów dynamicznych jest odrębnym i dość złożonym zagadnieniem. W pracach [MR8, MR11] autor wniosku uczestniczył w procesie tworzenia modeli systemów implementujących filtry Laguerre'a, zarówno dla systemów równomiernego i nierównomiernego, niecałkowitego rzędu.
- Projektowanie układów sterowania dla układów niecałkowitego rzędu.
W przedmiotowym obszarze autor współuczestniczył w budowaniu algorytmów sterowania dyskretnymi systemami niecałkowitego rzędu. W pracach [MR12, MR17] zaproponowano i poddano analizie algorytmy sterowania predykcyjnego oparte na różnych modelach aproksymujących systemy niecałkowitego rzędu. Ponadto w pracy [MR21] opracował redukowany aproksymator 'frakcyjnego' członu całkującego, który został zastosowany we 'frakcyjnej' wersji regulatora PID dla celów sterowania systemem lewitacji magnetycznej.
- Modelowanie i redukcja hierarchicznych modeli złożonych systemów sterowania.
Programy symulacyjne (np. MATLAB/*Simulink*) udostępniają technologię budowy modeli hierarchicznych poprzez mechaniczne łączenie podsystemów. Jednakże ta hierarchiczna budowa modeli w środowiskach obliczeniowych związana jest

wyłącznie z funkcjonowaniem edytora graficznego. W pamięci komputera model przechowywany jest jednak w postaci jednopoziomowej, jako wysokiego rzędu układ równań różniczkowych zwyczajnych oraz algebraicznych. Może to prowadzić do szeregu problemów numerycznych. Z tego względu w przeprowadzonych badaniach zaproponowano wielowarstwową konstrukcję modelu wraz z dekompozycją i redukcją modeli na poszczególnych poziomach hierarchicznej struktury. Podejście takie umożliwia stworzenie zredukowanego modelu hierarchicznego, zawierającego zbiór modeli na każdym z poziomów hierarchii, charakteryzujących się różnymi zakresami adekwatności oraz dokładności aproksymacji obiektu. Wyniki badań znalazły zastosowanie w modelowaniu podsystemów parownika kotła energetycznego BP-1150 [MR28, MR29, MR31, MR32, MR34].

- Zastosowanie algorytmów ewolucyjnych do optymalizacji parametrów metod redukcji.
Prowadzone badania zorientowane zostały na problematykę automatyzacji procesu redukcji. Wynikiem praktycznym podjętych badań było stworzenie przybornika eAMOR (Evolutionary Algorithms for Model Order Reduction) dla pakietu MATLAB/Simulink. Celem przybornika jest optymalizacja parametrów metod redukcji z zastosowaniem hybrydowego algorytmu ewolucyjnego. Opracowany przybornik umożliwia dobór parametrów redukcji metodami: Frequency Weighted, Frequency Domain oraz Fourier Model Reduction dla złożonych modeli obiektów sterowania. Badania były prowadzone w ramach projektu badawczego MNiSW DS-MN/08/WE/12. Wyniki badań znalazły zastosowanie dla celów redukcji zlinearyzowanych modeli podsystemów parownika kotła energetycznego BP-1150 [MR23, MR24, MR25, MR30], jak również innych systemów złożonych [MR26, MR27].
- Zastosowanie narzędzi matematycznych do modelowania procesów w różnych dziedzinach nauki.
Autor uczestniczył również w pracach związanych w praktyczną implementacją rachunku niecałkowitego rzędu w modelowaniu zjawisk fizycznych, na przykładzie układu ładowania/rozładowania superkondensatora [MR13, MR18]. Odrębnym zagadnieniem w którym autor brał praktyczny udział, było zastosowanie modelowania matematycznego i statystyki matematycznej do budowania i walidacji uproszczonych modeli wydajności wysiłkowej organizmu człowieka na podstawie 6-minutowej próby marszowej. Opracowana metodologia, opublikowana w pracy [MR10], pozwala na istotne uproszczenie procedury wyznaczania wydolności pacjentów ze schorzeniami dróg oddechowych.
- Budowa urządzeń pomiarowych do wyznaczania parametrów trakcyjnych pojazdów mechanicznych.
W latach 2010–2012 autor niniejszego wniosku brał udział w opracowaniu urządzenia PAAF II, w ramach którego zaprojektował oraz wykonał prototyp głowicy pomiarowej. Głowica ta ma za zadanie mierzyć wartości sygnałów z wielu czujników, w szczególności z akcelerometrów, żyroskopów oraz czujników pola magnetycznego. Jest urządzeniem autonomicznym komunikującym się bezprzewodowo z modułem

głównym. Wszystkie elementy systemu są zasilane bateryjne, co narzuciło wymagania dotyczące energooszczędności oraz niskiego napięcia zasilania. Zadaniem modułu głównego, jest obróbka cyfrowa sygnałów oraz estymacja parametrów trakcyjnych i diagnostycznych układu napędowego pojazdu drogowego. Prototyp urządzenia PAAF II był przedmiotem prezentacji podczas International Advanced Mobility Forum 2012, Genewa, Szwajcaria 2012. Prace były realizowane w ramach projektu badawczo-rozwojowego PBR-0507/R/T02/2009/06.

Podsumowując, łącznie po obronie doktoratu autor niniejszego wniosku opublikował 34 prace, z czego 8 w czasopiśmie posiadającym IF, 18 indeksowanych w bazie WoS oraz 23 indeksowane w bazie Scopus. Sumaryczny IF opublikowanych prac wynosi 19.301, z czego 14.706 dla publikacji wchodzących w skład zgłaszanego osiągnięcia naukowego. Indeksowane prace były cytowane 33 razy (13 bez autocytowań) według bazy WoS oraz 57 razy (21 bez autocytowań) według bazy Scopus. Indeks Hirscha wynosi odpowiednio 3 według bazy WoS oraz 4 według bazy Scopus. Autor wniosku jest współautorem 1 patentu (PAT.227927) oraz brał udział jako kierownik projektu finansowanego z NCN (2017/01/X/ST7/00885) i wykonawca projektu badawczego finansowanego z MNiSW (DS-MN/08/WE/12). Ponadto jest autorem 18 recenzji manuskryptów zgłoszonych do publikacji w czasopiśmie: *Circuits, Systems, and Signal Processing* (5), *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences* (2), *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* (2), *IEEE Control Systems Letters* (2), *Mathematics* (2), *Applied Mathematical Modelling* (1), *Engineering Computations* (1), *Journal of Computational and Applied Mathematics* (1), *Mathematical Problems in Engineering* (1), *Soft Computing* (1). Autor recenzował również prace złożone do komitetów programowych następujących konferencji międzynarodowych: *International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics* (4), *IEEE Conference Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications* (1).

Szczegółowy wykaz opublikowanych prac naukowych, zrealizowanych oryginalnych osiągnięć projektowych oraz informacja o osiągnięciach dydaktycznych, współpracy naukowej i popularyzacji nauki został zamieszczony w Załączniku 3.

Poniżej przedstawiony jest wykaz publikacji nie wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego opublikowanych po uzyskaniu stopnia doktora:

- [MR8] Latawiec K., Stanisławski R., Łukaniszyn M., Rydel M., Szkuta B.: *Grünwald-Letnikov-Laguerre modeling of discrete-time noncommensurate fractional-order state space LTI MIMO systems*, [w:] *Non-Integer Order Calculus and its Applications*, Red. P. Ostalczyk, D. Sankowski i J. Nowakowski, *Lecture Notes in Electrical Engineering* vol. 496, 2019, Springer, pp. 74–83. (indeksowane w WoS)
- [MR9] Stanisławski R., Rydel M., Latawiec K.J.: *New Stability Tests for Discretized Fractional-Order Systems Using the Al-Alaoui and Tustin Operators*, *Complexity*, vol. 2018, Article ID 2036809, 2018.
- [MR10] Szczegielniak J., Latawiec K.J., Luniewski J., Stanisławski R., Bogacz K., Krajczy M., Rydel M.: *A study on nonlinear estimation of submaximal effort tolerance based on the generalized MET concept and the 6MWT in pulmonary rehabilitation*, *PLoS ONE*, Vol. 13/2, Article ID: e0191875, 2018.

- [MR11] Latawiec K.J., Stanisławski R., Łukaniszyn M., Rydel M., Szkuta B.: *FPLD-Based Modeling of Fractional-Order State Space LTI MIMO Systems*, [w:] Applied Physics, System Science and Computers, Red. K. Ntalianis i A. Croitoru, Lecture Notes in Electrical Engineering vol. 428, 2018, Springer pp. 293–302. (indeksowane w WoS)
- [MR12] Stanisławski R., Latawiec K.J., Rydel M., Łukaniszyn M., Gałek M.: *Predictive Control of Linear Fractional-Order Systems Based on Discrete-Time Fractional-Order Laguerre Filters*, 23rd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 27–30.08 2018 Międzyzdroje, pp. 110–113. (indeksowane w Scopus)
- [MR13] Czuczwała W., Latawiec K.J., Stanisławski R., Łukaniszyn M., Kopka R., Rydel M.: *Modeling of a Supercapacitor Charging Circuit Using two Equivalent RC Circuits and Forward vs. Backward Fractional-Order Differences*, Progress in Applied Electrical Engineering, 18–22.06 2018 Kościelisko, pp. 1–6. (indeksowane w WoS)
- [MR14] Rydel M., Stanisławski R.: *Modeling of discrete-time fractional-order state-space systems using the frequency weighted Fourier-based method*, 5th IFAC Conference on Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems, 18–22.02 2018 Hyderabad, India, pp. 486–487.
- [MR15] Walaszek-Babiszewska A., Rydel M., Kashpruk N.: *On the Equivalence between AR Family Time Series Models and Fuzzy Models in Signal Processing*, IEEE Second International Conference on Data Stream Mining & Processing, 21–25.08 2018 Lviv, Ukraine, pp. 331–335. (indeksowane w WoS)
- [MR16] Rydel M., Stanisławski R., Gałek M., Latawiec K.J.: *Modeling of Fractional-Order Integrators and Differentiators Using Tustin-Based Approximations and Model Order Reduction Techniques*, [w:] Theory and Applications of Non-integer Order Systems, Red. A. Babiarez, A. Czornik, J. Klarnka i M. Niezabitowski, Lecture Notes in Electrical Engineering vol. 407, 2017, Springer pp. 277–286. (indeksowane w Scopus)
- [MR17] Stanisławski R., Rydel M., Latawiec K.J., Łukaniszyn M., Gałek M.: *A comparative analysis of two methods for model predictive control of fractional-order systems*, 22nd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 28–31.08 2017 Międzyzdroje, pp. 159–163. (indeksowane w WoS)
- [MR18] Latawiec K.J., Stanisławski R., Łukaniszyn M., Czuczwała W., Rydel M.: *Fractional-order modeling of electric circuits: modern empiricism vs. classical science*, Progress in Applied Electrical Engineering, 25–30.06 2017 Kościelisko, pp. 1–4. (indeksowane w WoS)
- [MR19] Rydel M., Stanisławski R., Bialic G., Latawiec K.J.: *A Modeling of Discrete-Time Fractional-Order State Space Systems Using the Balanced Truncation Method*, [w:] Theoretical Developments and Applications of Non-Integer Order Systems, Red. S. Domek i P. Dworak, Lecture Notes in Electrical Engineering vol. 357, 2016, Springer pp. 119–127. (indeksowane w Scopus)
- [MR20] Stanisławski R., Rydel M., Gałek M.: *Implementation issues in discretization of fractional-order derivative using the Al-Alaoui operator*, 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 27.08–01.09 2016 Międzyzdroje, pp. 844–847. (indeksowane w WoS)
- [MR21] Bauer W., Rydel M.: *Application of model reduction methods to the realization P^λD controller*, 39th International Conference on Telecommunications and Signal Processing, 27–29.06 2016 Vienna, pp. 611–614. (indeksowane w WoS)

- [MR22] Rydel M., Stanisławski R., Stanisławski W., Latawiec K.J.: *A Comparative Analysis of Selected Integer-Order and Noninteger-Order Linear Models of Complex Dynamical Systems*, [w:] *Advances in modelling and control of non-integer order systems*. Red. K.J. Latawiec, M. Łukaniszyn i R. Stanisławski, *Lecture Notes in Electrical Engineering* vol. 320, 2015, Springer pp. 91–100. (indeksowane w WoS)
- [MR23] Rydel M., Stanisławski W.: *Selection of the objective function of reduction parameter optimization algorithm, and its impact on the properties of reduced MIMO models*, 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 24–27.08 2015 Międzyzdroje, pp. 591–595. (indeksowane w WoS)
- [MR24] Rydel M.: *Redukcja zlinearyzowanych modeli obiektów sterowania metodą Frequency Weighted z wykorzystaniem algorytmów ewolucyjnych*, *Zesz.Nauk.PO s.Informatyka*, z.3, 2015, s. 153–166
- [MR25] Rydel M., Stanisławski W.: *Selection of reduction parameters of Rational Krylov Methods for complex MIMO LTI models using evolutionary algorithm*, 19th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 02–05.09 2014 Międzyzdroje, pp. 720–725. (indeksowane w WoS)
- [MR26] Rydel M.: *Redukcja modeli obiektów sterowania metodą Frequency Weighted z zastosowaniem algorytmu ewolucyjnego*, *Modelowanie, Symulacja i Zastosowania w Technice MSiZwT'12*, 18–22.06 2012 Kościelisko, pp. 207–210.
- [MR27] Rydel M., Stanisławski W.: *Optymalizacja zredukowanych modeli matematycznych z zastosowaniem algorytmu dwustopniowego*, *Modelowanie Inżynierskie*, tom 11, nr 42, 2011, s. 369–376.
- [MR28] Stanisławski W., Rydel M.: *Zredukowany hierarchiczny model matematyczny złożonego obiektu sterowania na przykładzie kotła energetycznego*, [w:] *Postępy Automatyki i Robotyki*, Red. K. Malinowski i R. Dindorf, Wydaw. Politechniki Świętokrzyskiej, seria: *Monografie*, vol. 16/2, 2011, s. 288–299, XVII Krajowa Konferencja Automatyki, 19–22.06 2011 Kielce-Cedzyna.
- [MR29] Stanisławski W., Rydel M.: *Hierarchical models of complex plants on basis of power boiler example*, *Archives of Control Sciences*, vol. 20(LVI), nr 4, 2010, pp. 381–416. (indeksowane w Scopus).
- [MR30] Rydel M., Stanisławski W.: *Optymalizacja parametrów metod redukcji bazujących na dekompozycji SVD dla celów redukcji liniowych modeli obiektów sterowania typu MIMO*, *Metody Informatyki Stosowanej*, vol. 24, nr 3, 2010, s. 197–220.
- [MR31] Stanisławski W., Rydel M.: *Problemy konstruowania modeli hierarchicznych złożonych obiektów sterowania cz. II*, *Pomiary Automatyka Kontrola* nr 3, 2010, s. 287–291.
- [MR32] Stanisławski W., Rydel M.: *Problemy konstruowania modeli hierarchicznych złożonych obiektów sterowania cz. I*, *Pomiary Automatyka Kontrola* nr 2, 2010, s. 201–204.
- [MR33] Rydel M., Stanisławski W.: *Problemy redukcji złożonych modeli obiektów sterowania*, *Pomiary Automatyka Kontrola*, nr 2, 2010, s. 197–200.
- [MR34] Rydel M.: *Zredukowane hierarchiczne modele złożonych obiektów sterowania na przykładzie kotła energetycznego*, [w:] *Innowacyjne rozwiązania w obszarze automatyki, robotyki i pomiarów*, Red. J. Kacprzyk, Oficyna Wydaw. PIAP, seria: *Monografie Studia Rozprawy*, Warszawa 2010, s. 67–80.

Marek Rydel

